

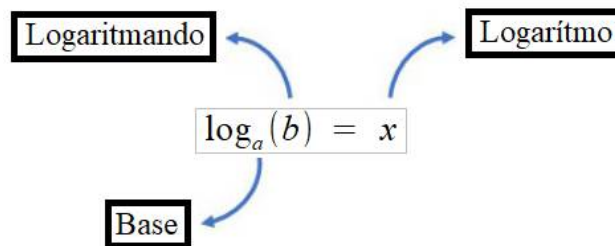
Módulo 07 – Função logarítma. Gráficos.

7.1 – Logarítmo. Função logarítmica. Gráfico

Chamamos de **logarítmo** de um número **b** o expoente **x** a que outro número **a**, chamado de base deve ser elevado para produzir este número **b**.

$$\log_a(b) = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b \quad (a > 0, a \neq 1 \text{ e } b > 0)$$

$$b \leftarrow \text{Logaritmando} \quad x \leftarrow \text{Logarítmo} \quad a \leftarrow \text{Base}$$



- Exemplo:
- $\log_2(8) = 3$ pois $2^3 = 8$
 - $\log_2(32) = 5$ pois $2^5 = 32$
 - $\log_2(2) = 1$ pois $2^1 = 2$
 - $\log_2(1) = 0$ pois $2^0 = 1$
 - $\log_3(81) = 4$ pois $3^4 = 81$
 - $\log_{10}(1000) = 3$ pois $10^3 = 1000$

7.1.1 – Propriedades do logarítmo.

(1) Logarítmo do produto

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \quad (a, b, c > 0 \text{ e } a \neq 1)$$

- Exemplo:
- 1) $\log_2(8 \cdot 32) = \log_2 8 + \log_2 32 = 3 + 5 = 8$
 - 2) $\log_3(27 \cdot 243) = \log_3 27 + \log_3 243 = 3 + 5 = 8$

(2) Logarítmo do quociente

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \quad (a, b, c > 0 \text{ e } a \neq 1)$$

Exemplo: 1) $\log_2\left(\frac{8}{32}\right) = \log_2 8 - \log_2 32 = 3 - 5 = -2$

2) $\log_3\left(\frac{27}{243}\right) = \log_3 27 - \log_3 243 = 3 - 5 = -2$

(3) Logarítmo da potência

$$\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b \quad (a, b, c > 0 \text{ e } a \neq 1)$$

Exemplo: 1) $\log_2(8^3) = 3 \cdot \log_2 8 = 3 \cdot 3 = 9$

2) $\log_3(81^5) = 5 \cdot \log_3 81 = 5 \cdot 4 = 20$

(4) Logarítmo da raiz

$$\log_a(\sqrt[n]{b}) = \log_a(b^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} \cdot \log_a b \quad (a, b > 0 \text{ e } a \neq 1)$$

Exemplo: 1) $\log_2(\sqrt[4]{8}) = \frac{1}{4} \cdot \log_2 8 = \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{3}{4}$

2) $\log_3(\sqrt[5]{81}) = \frac{1}{5} \cdot \log_3 81 = \frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{4}{5}$

3)

7.1.2 – Função logarítmica.

Seja a um número real tal que $a > 0$ e $a \neq 1$. Chama-se função logarítmica de base a , a função

$$y = f(x) = \log_a(x)$$

Exemplos: 1) $f(x) = \log_2 x$

2) $f(x) = \log_5(x - 2)$

3) $f(x) = \log_{0,5} x$

7.1.3 – Função logarítmica. Gráfico.

Seja a um número real tal que $a > 0$ e $a \neq 1$. Considere a função logarítmica de base a , definida por

$$y = f(x) = \log_a(x)$$

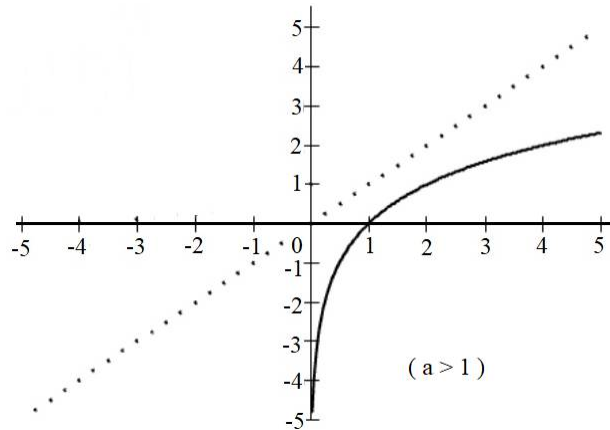
Domínio da função logarítmica: $Dom(f) = R_+ = \{x \in R; x > 0\}$

Imagem da função logarítmica: $Imagem(f) = R$

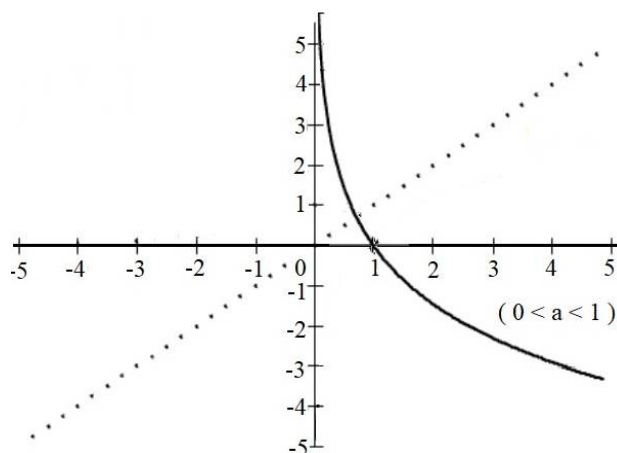
Se $a > 1$ a função logarítmica f é crescente

Se $0 < a < 1$ a função logarítmica f é decrescente

1) Se $a > 1$ então f é crescente



2) Se $0 < a < 1$ então f é decrescente



Exercícios:

1) Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_2(x^2 - 1)$

b) $f(x) = \log_{x-1}(2x - x^2)$

c) $f(x) = \log_3(2^x - 4)$

d) $f(x) = \log(2^x + 4)$

e) $f(x) = 2 + \ln(1 - x)$

Se $f(x) = \log_a(x)$ então, $f(1) = \log_a(1) = 0$

$$f(a) = \log_a(a) = 1$$

$$f(a^n) = \log_a(a^n) = n$$

$$\log_a(x) = \log_a(y) \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

$$a^{\log_a b} = b$$

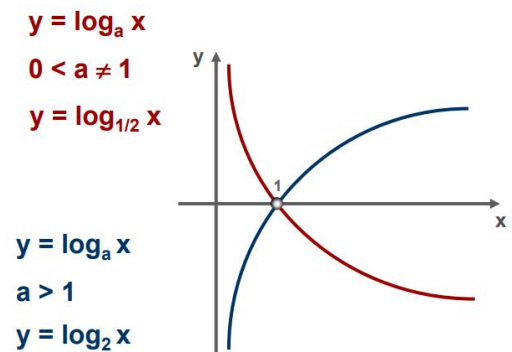
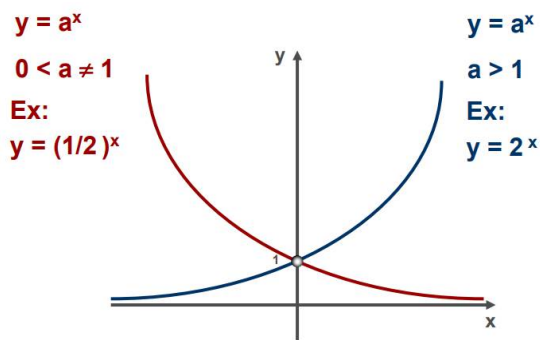
Se $a > 1$ e $0 < x < 1$ então, $f(x) < 0$

Se $a > 1$ e $x > 1$ então, $f(x) > 0$

Se $0 < a < 1$ e $0 < x < 1$ então, $f(x) > 0$

Se $0 < a < 1$ e $x > 1$ então, $f(x) < 0$

Gráficos da função exponencial e da função logarítmica:



7.1.4 – Logarítmo natural ou neperiano.

Os logarítmos de base e ($e = 2,718281828459\dots$) são chamados de logarítmos naturais ou neperianos.

$$y = f(x) = \log_e(x) = \ln x$$

Exemplos: 1) $\ln e = 1$

2) $\ln 1 = 0$

7.1.5 – Logarítmo decimal.

Os logarítmos de base 10 são chamados de logarítmos decimais.

$$y = f(x) = \log_{10}(x) = \log x$$

- Exemplos:
- | | |
|-------------------|--------------------|
| 1) $\log 10 = 1$ | 2) $\log 1 = 0$ |
| 3) $\log 100 = 2$ | 3) $\log 1000 = 3$ |

7.1.6 – Mudança de base.

Em muitos casos na resolução de operações envolvendo logarítmos, se faz necessário a **mudança de base de um logarítmo**.

Consideremos a seguinte situação: Temos $\log_c a$ mas necessitamos do $\log_b a$.

$$\log_b a = x \iff b^x = a \iff \log_c b^x = \log_c a \iff$$

$$x \log_c b = \log_c a \iff \log_b a = x = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

Exemplos: 1) Calcule pela mudança de base o valor de $\log_{64} 4$, sabendo que $\log_2 4 = 2$ e $\log_2 64 = 6$.

$$\log_{64} 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 64} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

2) Sabendo-se que $\log 2 = 0,301$ e $\log 3 = 0,477$, calcule o valor de $\log_9 512$

$$\begin{aligned}\log_9 512 &= \frac{\log_{10} 512}{\log_{10} 9} = \frac{\log_{10} 2^9}{\log_{10} 3^2} = \frac{9 \log_{10} 2}{2 \log_{10} 3} = \frac{9 \times 0,3010}{2 \times 0,4770} = \\ &= \frac{2,709}{0,954} = 2,8396\end{aligned}$$

Referências Bibliográficas:

Silva, Sebastião Medeiros da. Matemática para os cursos de economia, administração e contabilidade. 5.ed. São Paulo: Editora Atlas, 1999.

Viveiro, Tânia Cristina Neto G.. Manual Compacto de Matemática: Teoria e Prática. 2.ed. São Paulo: Editora Rideel, 1996.

Giovanni, José Rui; Bonjorno, José Roberto; Giovanni Jr., José Rui, Matemática completa: ensino médio – vol. Único, São Paulo : Editora FTD, 2002.

Lemos, Aluisio Andrade; Higuchi, Fideficio; Fridman, Salomão, Matemática, São Paulo: Editora Moderna, 1976.

Bezerra, Manoel; Jairo, Questões de Matemática, São Paulo: Editora Nacional, 1976.

Sodré, Ulysses; Matemática para o Ensino Fundamental, Médio e Superior;
<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/index.html> - Out/2007

Telecurso 2000 - Matemática - <http://www.bibvirt.futuro.usp.br/> -
http://www.bibvirt.futuro.usp.br/textos/telecurso_2000

Telecurso 2000 - Matemática - <http://www.bibvirt.futuro.usp.br/> -
http://www.bibvirt.futuro.usp.br/textos/telecurso_2000

KlickEducação O Portal da Educação - <http://www.klickeducacao.com.br>
Exatas - <http://www.exatas.mat.br/index.htm>

Só Matemática- <http://www.somatematica.com.br/>

Matemática.com.br - <http://matemática.com.br/>

<http://vestibular.uol.com.br/resumo-das-disciplinas/matematica/>

http://educacao.uol.com.br/matematica/ensino_medio.jhtm

<http://www.priklady.eu/en/Mathematics/Algebraic-Expressions.alej>

http://www.profcardy.com/cardicas/exercicios/semana_02_1.htm

<http://blog.educacaoadventista.org.br/tioney/arquivos/lista-fatoracao.pdf>

<https://brasilecola.uol.com.br/matematica/passo-passo-para-construcao-grafico-funcao-segundo-grau.htm>