

Módulo 06 – Função Modular. Gráfico. Equações modulares. Inequações modulares. Função exponencial.

6.1 – Módulo de um número real.

Sabemos que:

$$|x| = x \text{ se } x \geq 0 \quad \text{e}$$

$$|x| = -x \text{ se } x < 0$$

Exemplos:

1) $|5| = 5$

2) $|-5| = -(-5) = 5$

3) $|6+5| = |11| = 11$

4) $|-3-5| = |-8| = 8$

5) $|-3+5| = |2| = 2$

6) $|-3|+|5| = -(-3)+5 = 3+5 = 8$

Exemplos:

1) $|x-4| = x-4 \text{ se } x-4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$
 $= x-4 \text{ se } x \geq 4$

$$|x-4| = -(x-4) \text{ se } x-4 < 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$= -x+4 \text{ se } x < 4$$

2) $|2x-10| = 2x-10 \text{ se } 2x-10 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$
 $= 2x-10 \text{ se } 2x \geq 10 \quad \Leftrightarrow$
 $= 2x-10 \text{ se } x \geq 5$

$$|2x-10| = -(2x-10) \text{ se } 2x-10 < 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$= -2x+10 \text{ se } 2x < 10 \quad \Leftrightarrow$$
$$= -2x+10 \text{ se } x < 5$$

3) $|x^2-9| = x^2-9 \text{ se } x^2-9 \geq 0 \quad \Leftrightarrow$
 $= x^2-9 \text{ se } x^2 \geq 9 \quad \Leftrightarrow$
 $= x^2-9 \text{ se } x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3$

3) $|x^2-9| = -(x^2-9) \text{ se } x^2-9 < 0 \quad \Leftrightarrow$

$$= 9 - x^2 \quad \text{se} \quad x^2 < 9 \quad \Leftrightarrow$$

$$= 9 - x^2 \quad \text{se} \quad -3 < x < 3$$

6.2 – Propriedades

Para quaisquer valores x e y reais temos:

$$1) \sqrt{x^2} = |x|$$

$$2) |x| \geq 0$$

$$3) |x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

$$4) |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$5) |x + y| \leq |x| + |y|$$

$$6) |x| = |-x|$$

$$7) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

Quando $a > 0$ temos ainda:

$$8) |x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a$$

$$9) |x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -a \quad \text{ou} \quad x \geq a$$

Exemplo: $|x - 3| \leq 9$

$$-9 \leq x - 3 \leq 9$$

$$-6 \leq x \leq 12$$

6.3 – Função Modular

Definição: $f(x) = |x|$

$$f(x) = x \quad \text{se} \quad x \geq 0 \quad \text{ou}$$

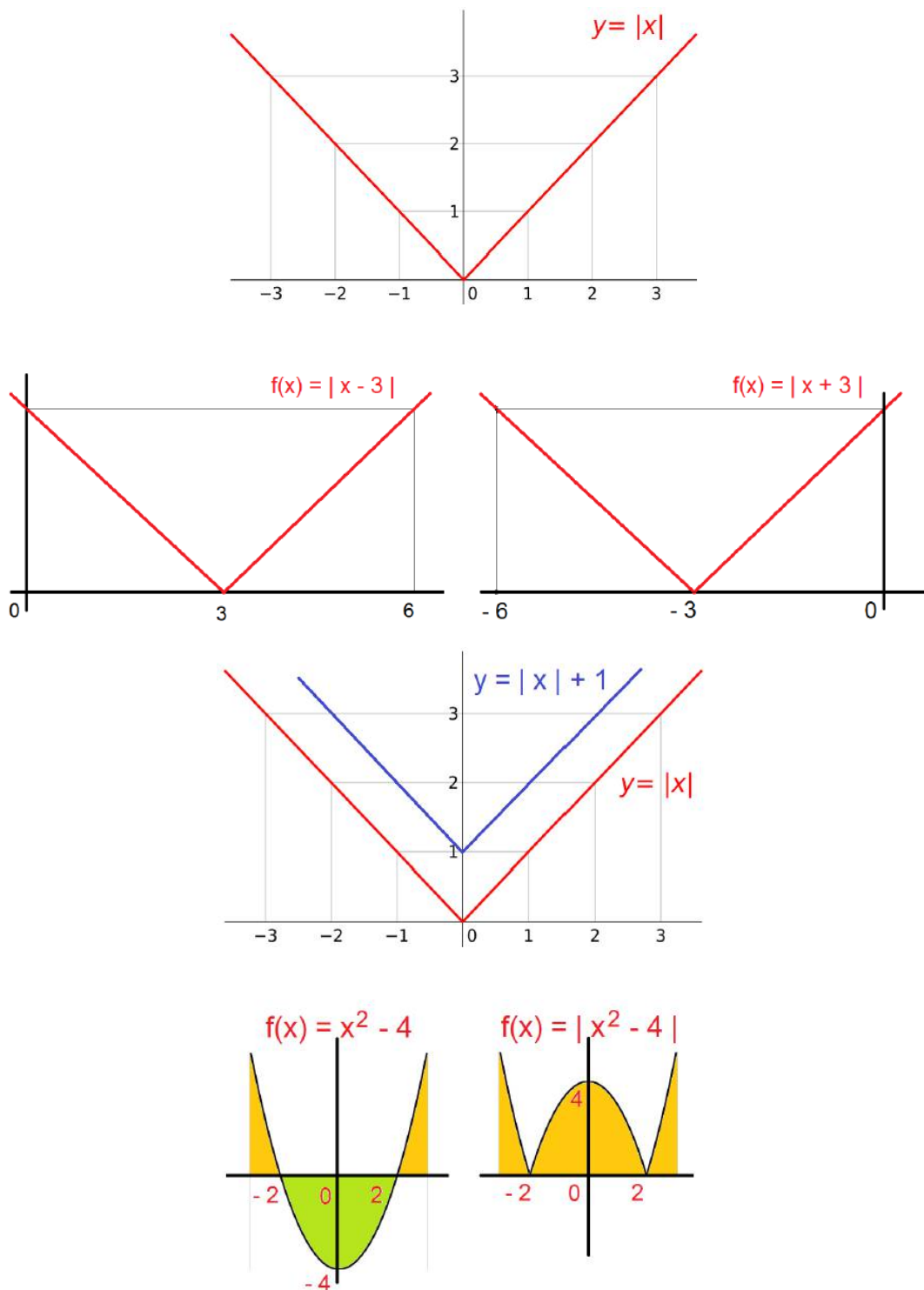
$$f(x) = -x \quad \text{se} \quad x < 0$$

Exemplos: 1) $f(x) = |x - 3|$

2) $f(x) = |x + 3|$

3) $f(x) = |x^2 - 4|$

6.3.1 – Função modular. Gráfico.



6.4 – Equação modular

$$|2x - 7| = 3$$

$$|2x - 7| = 2x - 7$$

se

$$2x - 7 \geq 0$$

LIGA DE ENSINO DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO UNIVERSITÁRIO DO RIO GRANDE DO NORTE

$$\text{se } 2x \geq 7$$

$$\text{se } x \geq 3,5$$

$$2x - 7 = 3$$

$$2x = 10$$

$$x = 5 \quad \text{É solução pois } 5 \geq 3,5$$

$$|2x - 7| = -2x + 7 \quad \text{se } 2x - 7 < 0$$

$$\text{se } 2x < 7$$

$$\text{se } x < 3,5$$

$$-2x + 7 = 3$$

$$-2x = -4$$

$$x = 2 \quad \text{É solução pois } 2 < 3,5$$

Exemplo: $|x - 4|^2 - 2|x - 4| - 8 = 0$

Primeira hipótese: $x - 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 4$

$$|x - 4| = x - 4$$

$$(x - 4)^2 - 2(x - 4) - 8 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 - 2x + 8 - 8 = 0$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$x = 2 \text{ ou } x = 8 \quad \text{A solução é } x = 8 \text{ pois } 8 \geq 4$$

Segunda hipótese: $x - 4 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 4$

$$|x - 4| = -x + 4$$

$$(-x + 4)^2 - 2(-x + 4) - 8 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 - 2x + 8 - 8 = 0$$

$$x^2 - 6x = 0$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 6 \quad \text{A solução é } x = 0 \text{ pois } 0 < 4$$

6.4.1 – Inequação modular

Exemplo: $|x - 4| < 5$

$$x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$$

Primeira hipótese: $x < 4$

$$-x + 4 < 5$$

$$-x < 1$$

$$x > -1$$

Solução: $-1 < x < 4$

Segunda hipótese: $x \geq 4$

$$x - 4 < 5$$

$$x < 9$$

Solução: $4 \leq x < 9$

Solução final: $-1 < x < 9$

Exemplo: $|2x - 6| > 4$

$$2x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

Primeira hipótese: $x < 3$

$$-2x + 6 > 4$$

$$-2x > -2$$

$$x < 1$$

Solução: $x < 1$

Segunda hipótese: $x \geq 3$

$$2x - 6 > 4$$

$$2x > 10 \quad \Leftrightarrow \quad x > 5$$

Solução: $x > 5$

Solução final: $x < 1$ ou $x > 5$

Exemplo: $4 < |2x - 6| < 8$

$$2x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3$$

Primeira hipótese: $x < 3$

$$-2x + 6 > 4 \quad \text{e} \quad -2x + 6 < 8$$

$$-2x > -2 \quad \text{e} \quad -2x < 2$$

$$x < 1 \quad \text{e} \quad x > -1$$

Solução: $-1 < x < 1$

Segunda hipótese: $x \geq 3$

$$2x - 6 > 4 \quad \text{e} \quad 2x - 6 < 8$$

$$2x > 10 \quad \text{e} \quad 2x < 14$$

$$x > 5 \quad \text{e} \quad x < 7$$

Solução: $5 < x < 7$

Solução final: $-1 < x < 1$ ou $5 < x < 7$

Exemplo: $|2x + 8| + |x - 5| \geq 15$

$$2x + 8 = 0$$

$$2x = -8$$

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

$$x = -4$$

Primeira hipótese: $x < -4$

$$-2x - 8 - x + 5 \geq 15$$

$$-3x \geq 18$$

$$x \leq -6$$

Solução: $x \leq -6$

Segunda hipótese: $-4 \leq x < 5$

$$2x + 8 - x + 5 \geq 15$$

$$x \geq 2$$

Solução: $2 \leq x < 5$

Terceira hipótese: $x \geq 5$

$$2x + 8 + x - 5 \geq 15$$

$$3x \geq 12$$

$$x \geq 4$$

Solução: $x \geq 5$

Solução geral: $x \leq -6$ ou $x \geq 2$

6.5 – Função exponencial

$a^n = a.a.a \dots a.a$ é o produto de n fatores iguais a a

$$a^1 = a$$

$$a^2 = a.a$$

$$a^3 = a.a.a$$

$$a^4 = a.a.a.a$$

Exemplos: $2^3 = 2.2.2 = 8$

$$2^5 = 2.2.2.2.2 = 32$$

Todo número elevado a 1 é igual ao próprio número

$$2^1 = 2 \qquad 0,5^1 = 0,5$$

$$5^1 = 5 \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$$

Todo número, diferente de zero, elevado a 0 é igual a 1

$$2^0 = 1 \qquad 0,5^0 = 1$$

$$5^0 = 1 \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$$

Multiplicação de potências de mesma base

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Exemplo: $2^5 \cdot 2^3 = 2^8 = 256$

$$2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^{-6} = 2^{3+2+4-6} = 2^3 = 8$$

Divisão de potências de mesma base

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Exemplo: $\frac{3^5}{3^3} = 3^{5-3} = 3^2 = 9$

Porque $a^0 = 1$

$$a^0 = a^{1-1} = \frac{a^1}{a^1} = \frac{a}{a} = 1 \quad (a \neq 0)$$

Porque $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

Potência de um produto

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(a \cdot b)^n = a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot a \cdot b \dots a \cdot b = a \cdot a \cdot a \dots a \cdot b \cdot b \cdot b \dots b = a^n \cdot b^n$$

Potência de um quociente

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b} = \frac{a^n}{b^n}$$

Potência de uma potência

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot a^m \cdots a^m = a^{m+m+\dots+m} = a^{mn}$$

Potência de uma raiz

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

6.5.1 – Função exponencial. Definição

Seja $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$. Chamamos de função exponencial a função

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$.

Exemplo: 1) $f(x) = 2^x$

2) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

6.5.2 – Função exponencial. Gráfico

Primeiro caso: $a > 1$

Exemplo: $y = 2^x$

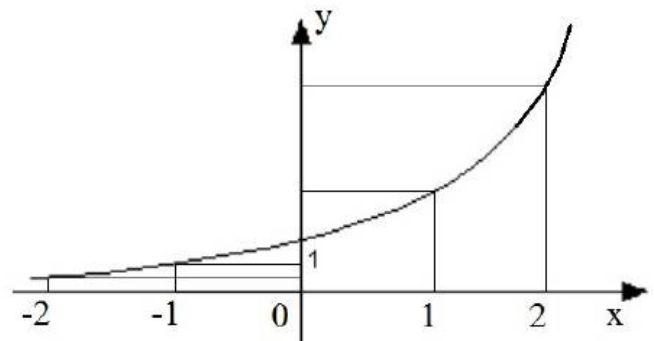
$$x = -2 \Rightarrow y = 0,25$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 0,5$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 2$$

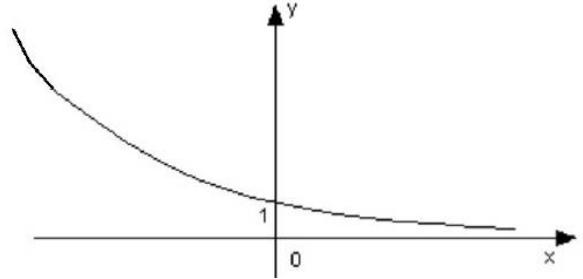
$$x = 2 \Rightarrow y = 4$$



Segundo caso: $0 < a < 1$

Exemplo: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$x = -3$	$y = 8$
$x = -2$	$y = 4$
$x = -1$	$y = 2$
$x = 0$	$y = 1$
$x = 1$	$y = 0,5$
$x = 2$	$y = 0,25$
$x = 3$	$y = 0,125$



Domínio da função exponencial: $Dom(f) = R$

Imagem da função exponencial: $Imagem(f) = \{y \in R; y > 0\}$

Se $a > 1$ a função exponencial f é crescente

Se $0 < a < 1$ a função exponencial f é decrescente

Não existe $x \in R$ tal que $a^x = 0$

Se $f(x) = a^x$ então, $f(0) = 1$

$$a^x = a^y \iff x = y$$

Referências Bibliográficas:

Silva, Sebastião Medeiros da. Matemática para os cursos de economia, administração e contabilidade. 5.ed. São Paulo: Editora Atlas, 1999.

Viveiro, Tânia Cristina Neto G.. Manual Compacto de Matemática: Teoria e Prática. 2.ed. São Paulo: Editora Rideel, 1996.

Giovanni, José Rui; Bonjorno, José Roberto; Giovanni Jr., José Rui, Matemática completa: ensino médio – vol. Único, São Paulo : Editora FTD, 2002.

Lemos, Aluisio Andrade; Higuchi, Fideficio; Fridman, Salomão, Matemática, São Paulo: Editora Moderna, 1976.

Bezerra, Manoel; Jairo, Questões de Matemática, São Paulo: Editora Nacional, 1976.

Sodré, Ulysses; Matemática para o Ensino Fundamental, Médio e Superior;
<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/index.html> - Out/2007

Telecurso 2000 - Matemática - <http://www.bibvirt.futuro.usp.br/> -
http://www.bibvirt.futuro.usp.br/textos/telecurso_2000

Telecurso 2000 - Matemática - <http://www.bibvirt.futuro.usp.br/> -
http://www.bibvirt.futuro.usp.br/textos/telecurso_2000

KlickEducação O Portal da Educação - <http://www.klickeducacao.com.br>
Exatas - <http://www.exatas.mat.br/index.htm>

Só Matemática- <http://www.somatematica.com.br/>

Matemática.com.br - <http://matematica.com.br/>

<http://vestibular.uol.com.br/resumo-das-disciplinas/matematica/>

http://educacao.uol.com.br/matematica/ensino_medio.jhtm

<http://www.priklady.eu/en/Mathematics/Algebraic-Expressions.alej>

http://www.profcardy.com/cardicas/exercicios/semana_02_1.htm

<http://blog.educacaoadventista.org.br/tioney/arquivos/lista-fatoracao.pdf>

<https://brasilecola.uol.com.br/matematica/passos-para-construcao-grafico-funcao-segundo-grau.htm>