

Aula 4 – Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais. Regra de Três.

Objetivos:

- Conceituar grandezas diretamente e inversamente proporcionais.
- Aplicar os conceitos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais para resolver regra de três simples.
- Aplicar os conceitos de grandezas diretamente e inversamente proporcionais para resolver regra de três composta.
- Resolver problemas de regra de três simples.
- Resolver problemas de regra de três composta.

5 – Grandezas Diretamente e Inversamente Proporcionais

Entendemos por grandeza tudo aquilo que pode ser medido, contado.

O volume, a massa, a superfície, o comprimento, a capacidade, a velocidade, o tempo, são alguns exemplos de grandezas.

No nosso dia-a-dia encontramos varias situações em que relacionamos duas ou mais grandezas.

Em uma corrida quanto maior for a velocidade, menor será o tempo gasto nessa prova. Aqui as grandezas são a velocidade e o tempo.

Numa construção, quanto maior for o número de funcionários, menor será o tempo gasto para que esta fique pronta. Nesse caso, as grandezas são o número de funcionário e o tempo.

5.1 – Grandezas Diretamente Proporcionais

Em um determinado mês do ano observou-se a seguinte situação:

Uma pessoa paga por 1 litro de gasolina R\$ 2,75.

Se comprar 2 litro, pagará R\$ 5,50.

Se comprar 3 litros, pagará R\$ 8,25.

Tomando como base esses dados podemos formar a seguinte tabela.

Quantidade de gasolina (em litros)	Quantidade a pagar (em reais)
1	2,75
2	5,50
3	8,25

Se a quantidade de gasolina dobra o preço a ser pago também dobra. Se a quantidade de gasolina triplica o preço a ser pago também triplica.

Neste caso as duas grandezas envolvidas, quantia a ser paga e quantidade de gasolina, são chamadas grandezas **diretamente proporcionais**.

Podemos, então, escrever que:

a razão de 1 para 2 é igual à razão de 2,75 para 5,50;
 a razão de 1 para 3 é igual à razão de 2,75 para 8,25;
 a razão de 2 para 3 é igual à razão de 5,50 para 8,25.

Em linguagem matemática:

$$\frac{1}{2} = \frac{2,75}{5,50} \quad \frac{1}{3} = \frac{2,75}{8,25} \quad \frac{2}{3} = \frac{5,50}{8,25}$$

Dois grandezas são chamadas, **diretamente proporcionais** quando, a razão entre os valores da primeira grandeza é igual a razão entre os valores correspondentes da segunda.

Em duas grandezas **diretamente proporcionais** quando dobrando uma delas a outra também dobra; quando triplicando uma delas a outra também triplica. Observe, que as razões são iguais.

O produto do numerador da primeira fração com o denominador da segunda fração é igual ao produto do denominador da primeira fração com o numerador da segunda.

$$1 \times 5,50 = 2 \times 2,75 \quad 1 \times 8,25 = 3 \times 2,75 \quad 2 \times 8,25 = 3 \times 5,50$$

Exemplo: Se um ônibus percorre uma estrada com velocidade média de 80 km/h, quantos quilômetros percorrerá em 2 horas?

Podemos organizar os dados do problema numa tabela, da seguinte maneira:

Horas	Velocidade (em Km/h)
1	80
2	X

$$\frac{1}{2} = \frac{80}{x} \quad \Rightarrow \quad 1 \times x = 2 \times 80 \quad \Rightarrow \quad x = 160$$

Exemplo: Depositando-se R\$ 600,00 numa caderneta de poupança, ao final do mês obtêm-se R\$ 621,00. Calcule a taxa de porcentagem do rendimento.

Podemos organizar os dados do problema da seguinte forma:

Rendimentos: $621,00 - 600,00 = 21,00$

$$100 \rightarrow 600,00$$

$$x \rightarrow 21,00$$

$$\frac{100}{x} = \frac{600,00}{21,00} \Rightarrow 600 \times x = 100 \times 21 \Rightarrow 600x = 21 \Rightarrow$$

$$x = \frac{21}{600} \Rightarrow x = 0,035 \Rightarrow x = \frac{3,5}{100} \Rightarrow x = 3,5\%$$

5.2 – Grandezas inversamente proporcionais

Um professor de matemática tem 24 livros para distribuir entre os seus melhores alunos. Se ele escolher apenas 2 alunos, cada um deles receberá 12 livros. Se ele escolher 4 alunos, cada um deles receberá 6 livros. Se ele escolher 6 alunos, cada um deles receberá 4 livros.

Um ciclista faz um treino para a prova de "1000 metros contra o relógio", mantendo em cada volta uma velocidade constante e obtendo, assim, um tempo correspondente, conforme a tabela abaixo

Velocidade (m/s)	Tempo (s)
5	200
8	125
10	100
16	62,5
20	50

Observe que uma grandeza varia de acordo com a outra. Essas grandezas são **variáveis dependentes**.

Observe que:

Quando **duplicamos** a velocidade, o tempo fica reduzido à **metade**.

Quando **quaduplicamos** a velocidade, o tempo fica reduzido à **quarta parte**.

Que à medida que a velocidade **umenta** o tempo **diminui**.

Dizemos, então, que as grandezas **velocidade** e **tempo** mantêm entre si uma **relação inversamente proporcional**.

Observando um pouco mais a tabela podemos verificar que:

$$5 \times 200 = 8 \times 125 = 10 \times 100 = 16 \times 62,5 = 20 \times 50$$

Duas grandezas são chamadas, **inversamente proporcionais** quando, a razão entre os valores da primeira grandeza é igual ao **inverso** da razão entre os valores correspondentes da segunda.

Duas grandezas são **inversamente proporcionais** quando, aumentando uma delas, a outra diminui na mesma proporção, ou, diminuindo uma delas, a outra aumenta na mesma proporção.

Em duas grandezas **inversamente proporcionais** quando dobrando uma delas, a outra se reduz para a metade; quando triplicando uma delas, a outra se reduz para a terça parte... e assim por diante.

Quando duas grandezas são inversamente proporcionais, os números que expressam essas grandezas variam um na razão inversa do outro, o que é equivalente a afirmar que **o produto entre eles se mantém constante**.

Exemplo: Dois pintores gastam 18 horas para pintar uma parede. Quanto tempo levariam 4 pintores para fazer o mesmo serviço?

Podemos organizar os dados do problema numa tabela, como segue:

Pintores	Tempo (h)
2	18
4	X

2 *pin* → 18 *horas*

4 *pin* → *x* *horas*

$$2 \times x = 4 \times 18 \quad \Rightarrow \quad 2x = 72 \quad \Rightarrow \quad x = 36$$

Exercícios: Resolver os seguintes exercícios:

1. Numa prova de 20 questões acertei 8. Qual a razão do número de questões certas para o de erradas?
Resp.: 2/3
2. Verifique se são diretamente ou inversamente proporcionais os seguintes pares de sucessões de números:

a) 2 3 5 6 9 15	b) 16 28 36 4 7 9	c) 2 4 5 20 10 8
--------------------	----------------------	---------------------
3. Dividir um lucro de R\$ 48.000,00, de uma sociedade, entre seus 3 sócios sabendo que eles trabalharam 2, 3 e 7 meses, respectivamente. Resp.: R\$ 8.000,00, R\$ 12.000,00 e R\$ 28.000,00
4. Dei R\$ 3.000,00 de gratificação aos meus empregados. Reparti a gratificação em partes inversamente proporcionais aos dias que faltaram ao trabalho. Quanto recebeu cada um se faltaram ao trabalho 2, 3 e 6 dias, respectivamente? Resp.: R\$ 1.500,00, R\$ 1.000,00 e R\$ 500,00
5. Um carro gasta 3 hs para percorrer 240 km. Quanto tempo levará para percorrer 360 km? Resp.: 4,5 hs
6. Uma máquina produz 20.000 unidades em 5 horas. Quanto produzirá em três horas e meia? Resp.: 14000
7. A uma velocidade média de 80 km por hora faço um percurso em 6 horas. Em quanto tempo efetuarei o mesmo percurso com uma velocidade média de 120 km/hs?
8. Um trem com a velocidade de 45 km/h, percorre certa distância em 3,5 horas. Nas mesmas condições e com a velocidade de 60 km/h, quanto tempo gastará para percorrer a mesma distância? (E. P. C. do Ar – 1958) Resp.: 2 hs 37 min e 30 s

9. Doze homens trabalhando 8 horas por dia, realizam determinada obra em 20 dias. Se o número de horas de serviço diário for baixado para 6 horas, em que tempo se fará o mesmo trabalho? (E. P. C. do Ar – 1958) Resp.: 26 dias e 4 hs
10. Divide-se R\$ 105,00 em três partes a, b e c que são ao mesmo tempo diretamente proporcionais a 3, 2 e 5 e inversamente proporcionais a 5, 3 e 6, respectivamente. Qual é a menor dessas partes? (C. Naval – 1972) Resp.: 30

5.3 – Regra de Três.

Na idade média, os árabes revelaram ao mundo a regra de três. No século XIII, o italiano Leonardo de Pisa difundiu os princípios dessa regra em seu livro *Líber Abaci*, com o nome de Regra de Três Números Conhecidos.

Podemos definir **Regra de três** ao cálculo matemático utilizado para resolver problemas que envolvam duas ou mais grandezas diretas ou inversamente proporcionais.

5.3.1 – Regra de três simples

O problema que envolve somente duas grandezas diretamente ou inversamente proporcionais é mais comumente chamado de **regra de três simples**.

A **regra de três simples** pode ser Direta ou Inversa.

Regra de três simples direta: Quando as duas grandezas envolvidas são diretamente proporcionais.

A montagem da solução deste tipo de problema é feita na mesma ordem de todas as grandezas.

Passos utilizados numa regra de três simples: Construir uma tabela, agrupando as grandezas da mesma espécie em colunas e mantendo na mesma linha as grandezas de espécies diferentes em correspondência. Identificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais.

Exemplo: Se 8m de tecido custam 156 reais, qual o preço de 12 m do mesmo tecido?

Tecido	Preço
8 m	R\$ 156,00
12 m	X

Observe que as grandezas são diretamente proporcionais, aumentando o metro do tecido aumenta na mesma proporção o preço a ser pago.

$$\frac{8}{12} = \frac{156}{x} \Rightarrow 8x = 12 \times 156 \Rightarrow x = \frac{12 \times 156}{8} \Rightarrow$$

$$x = \frac{12 \times 156}{4 \times 2} \Rightarrow x = 3 \times 78 = 234$$

Regra de três simples inversa: Quando as duas grandezas envolvidas são diretamente proporcionais.

A montagem da solução deste tipo de problema é feita na mesma ordem de todas as grandezas.

Exemplo: Um carro, à velocidade de 60km/h, faz certo percurso em 4 horas. Se a velocidade do carro fosse de 80km/h, em quantas horas seria feito o mesmo percurso?

Velocidade	Tempo (em h)
60 km	4 horas
80 km	X

Observe que as grandezas são inversamente proporcionais, aumentando a velocidade o tempo diminui na razão inversa.

$$\frac{60}{80} = \frac{x}{4} \Rightarrow 8x = 6 \times 4 \Rightarrow x = \frac{6 \times 4}{8} \Rightarrow x = \frac{6 \times 4}{4 \times 2} \Rightarrow x = 3$$

Exercícios: Resolver os seguintes exercícios:

- Um carro, à velocidade de 60km/h, faz certo percurso em 4 horas. Se a velocidade do carro fosse de 80km/h, em quantas horas seria feito o mesmo percurso?
- Uma gravura de forma retangular, medindo 20cm de largura por 35cm de comprimento, deve ser ampliada para 1,2m de largura. O comprimento correspondente será: Resp.: 2,1m
- Uma máquina varredeira limpa uma área de 5100m² em 3 horas de trabalho. Nas mesmas condições, em quanto tempo limpará uma área de 11900m²? Resp.: 7 horas
- Num acampamento avançado, 30 soldados dispõem de víveres para 60 dias. Se mais 90 soldados chegam ao acampamento, então, por quanto tempo o acampamento estará abastecido? Resp.: 15 dias
- Um alfaiate pagou R\$ 960,00 por uma peça de fazenda e R\$ 768,00 por outra de mesma qualidade. Qual o comprimento de cada uma das peças, sabendo-se que a primeira tem 12m a mais do que a segunda? Resp.: 60m e 48m
- De duas fontes, a primeira jorra 18 litros por hora e a segunda 80 litros. Qual é o tempo necessário para a segunda jorrar a mesma quantidade de água que a primeira jorra em 25 minutos? Resp.: 5min 37,5seg
- (FAAP) Uma impressora a laser, funcionando 6 horas por dia, durante 30 dias, produz 150 000 impressões. Em quantos dias 3 dessas mesmas impressoras, funcionando 8 horas por dia, produzirão 100 000 impressões? Resp.: 5
- (PUCCAMP) Sabe-se que 5 máquinas, todas de igual eficiência, são capazes de produzir 500 peças em 5 dias, se operarem 5 horas por dia. Se 10 máquinas iguais às primeiras operassem 10 horas por dia, durante 10 dias, o número de peças produzidas seria de: Resp.: 400
- Empregaram-se 27,4kg de lã para fabricar 24m de tecido de 60cm de largura. Qual será o comprimento do tecido que se poderia fabricar com 3,425 toneladas de lã para se obter uma largura de 0,90m? Resp.: 2.000 m
- Uma destilaria abastece 35 bares, dando a cada um deles 12 litros por dia, durante 30 dias. Se os bares fossem 20 e se cada um deles recebesse 15 litros, durante quantos dias a destilaria poderia abastecê-los? Resp.: 42 dias

5.3.2 – Regra de Três Composta

A regra de três composta é utilizada em problemas com mais de duas grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

Exemplo: Em 8 horas, 20 caminhões descarregam 160 m³ de areia. Em 5 horas, quantos caminhões serão necessários para descarregar 125 m³?

Horas	Caminhões	m ³ de areia
8 h	20 c	160 m ³
5 h	x	125 m ³

Horas	Caminhões	m ³ de areia
8 h	20 c	160 m ³
5 h	x	125 m ³
Inversa		Direta

Aumentando o número de horas de trabalho, podemos diminuir o número de caminhões para descarregar a mesma quantidade de areia. Portanto a relação é inversamente proporcional (**Inversa** na 1ª coluna).

Aumentando o volume de areia, devemos aumentar o número de caminhões para que a areia seja descarregada no mesmo tempo. Portanto a relação é diretamente proporcional (**Direta** na 3ª coluna).

Devemos igualar a razão que contém o termo x com o produto das outras razões de acordo com a proporcionalidade. As Diretas permanecem e as Inversas são invertidas.

$$\frac{20}{x} = \frac{160}{125} \times \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{20}{x} = \frac{20}{25} \Rightarrow$$

$$20x = 25 \times 20 \Rightarrow x = \frac{25 \times 20}{20} \Rightarrow x = 25$$

Exercícios: Resolver os seguintes exercícios:

1. Comprei 10 canetas por R\$ 5,00. Quanto pagarei por 16 canetas?
2. Com 10 pedreiros podemos construir um muro em 2 dias. Quantos dias levarão 5 pedreiros para fazer o mesmo trabalho?
3. Com uma área de absorção de raios solares de 1,2m², uma lancha com motor movido a energia solar consegue produzir 400 watts por hora de energia. Aumentando-se essa área para 1,5m², qual será a energia produzida? Resp.: 500 watts
4. Bianca comprou 3 camisetas e pagou R\$120,00. Quanto ela pagaria se comprasse 5 camisetas do mesmo tipo e preço?
5. Um trem, deslocando-se a uma velocidade média de 400Km/h, faz um determinado percurso em 3 horas. Em quanto tempo faria esse mesmo percurso, se a velocidade utilizada fosse de 480km/h? Resp.: 2,5 hs
6. Uma fábrica, em 3 dias de trabalho, produz 360m de tecidos, fazendo funcionar 8 máquinas. Em quantos dias poderá produzir 1.080m de tecidos, fazendo funcionar 6 máquinas?

7. Uma equipe de operários, trabalhando 8 horas por dia, realizou determinada obra em 20 dias. Se o número de horas de serviço for reduzido para 5 horas, em que prazo essa equipe fará o mesmo trabalho?
8. Numa fábrica de brinquedos, 8 homens montam 20 carrinhos em 5 dias. Quantos carrinhos serão montados por 4 homens em 16 dias?
9. Dois pedreiros levam 9 dias para construir um muro com 2m de altura. Trabalhando 3 pedreiros e aumentando a altura para 4m, qual será o tempo necessário para completar esse muro?
10. Três torneiras enchem uma piscina em 10 horas. Quantas horas levarão 10 torneiras para encher 2 piscinas? Resp.: 6 horas.
11. Uma equipe composta de 15 homens extrai, em 30 dias, 3,6 toneladas de carvão. Se for aumentada para 20 homens, em quantos dias conseguirão extrair 5,6 toneladas de carvão? Resp.: 35 dias.
11. Se 35 operários fazem uma casa em 24 dias, trabalhando 8 horas por dia, quantos operários serão necessários para fazer a mesma casa, em 14 dias, trabalhando 10 horas por dia?
12. Ao participar de um treino de Fórmula 1, um corredor imprimindo a velocidade média de 180 Km/h fez um certo percurso em 20s. Se a sua velocidade média fosse de 200 Km/h, qual seria o tempo gasto no mesmo percurso?
13. Funcionando durante 6 dias, 5 máquinas produziram 400 peças de uma mercadoria. Quantas peças dessa mesma mercadoria serão produzidas por 7 máquinas iguais às primeiras, se essas máquinas funcionarem durante 9 dias?
14. Um motociclista, rodando 4h por dia, percorre em média 200 Km em 2 dias. Em quantos dias esse motociclista irá percorrer 500 Km, se rodar 5 h por dia?
15. Vinte operários, trabalhando 8 horas por dia, gastam 18 dias para construir um muro de 300m. Quanto tempo levará uma turma de 16 operários, trabalhando 9 horas por dia, para construir um muro de 225m? Resposta: 15 dias.
16. Um caminhoneiro entrega uma carga em um mês, viajando 8 horas por dia, a uma velocidade média de 50 km/h. Quantas horas por dia ele deveria viajar para entregar essa carga em 20 dias, a uma velocidade média de 60 km/h? Resp.: 10 horas por dia.
17. Com uma certa quantidade de fio, uma fábrica produz 5400m de tecido com 90cm de largura em 50 minutos. Quantos metros de tecido, com 1 metro e 20 centímetros de largura, seriam produzidos em 25 minutos? Resp.: 2025 metros.
18. Doze operários, em 90 dias, trabalhando 8 horas por dia, fazem 36 m de certo tecido. Quantos dias levarão, para fazer 12 m do mesmo tecido, com o dobro da largura, 15 operários, trabalhando 6 horas por dia?
19. Vinte e um pintores trabalhando 8 hs por dia, pintam um edifício em 6 dias. Nas mesmas condições, quantos dias serão necessários para que nove pintores, trabalhando 7 hs por dia, pintem o mesmo edifício?
20. Se 10 máquinas, funcionando 6 horas por dia, durante 60 dias, produzem 90.000 peças, em quantos dias, 12 dessas máquinas, funcionando 8 horas por dia, produzirão 192.000 peças?

Referências Bibliográficas:

Silva, Sebastião Medeiros da. Matemática para os cursos de economia, administração e contabilidade. 5.ed. São Paulo: Editora Atlas, 1999.

Viveiro, Tânia Cristina Neto G.. Manual Compacto de Matemática: Teoria e Prática. 2.ed. São Paulo: Editora Rideel, 1996.

Giovanni, José Rui; Bonjorno, José Roberto; Giovanni Jr., José Rui, Matemática completa: ensino médio – vol. Único, São Paulo : Editora FTD, 2002.

Lemos, Aluisio Andrade; Higuchi, Fideficio; Fridman, Salomão, Matemática, São Paulo: Editora Moderna, 1976.

Bezerra, Manoel; Jairo, Questões de Matemática, São Paulo: Editora Nacional, 1976.

Sodré, Ulysses; Matemática para o Ensino Fundamental, Médio e Superior;
<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/index.html> - Out/2007

Telecurso 2000 - Matemática - <http://www.bibvirt.futuro.usp.br/> -
http://www.bibvirt.futuro.usp.br/textos/telecurso_2000

Telecurso 2000 - Matemática - <http://www.bibvirt.futuro.usp.br/> -
http://www.bibvirt.futuro.usp.br/textos/telecurso_2000

KlickEducação O Portal da Educação - <http://www.klickeducacao.com.br>

Exatas - <http://www.exatas.mat.br/index.htm>

Só Matemática- <http://www.somatematica.com.br/>

Matemática.com.br - <http://matematica.com.br/>