Módulo 04 – Sistemas de Equações. Inequações.

3.5 – Sistemas de equações.

Sistemas de equações do primeiro grau.

Considere a seguinte situação problema: Paulo e Miguel possuem juntos R$ 1200,00. O dobro da quantia de Paulo mais o triplo da quantia de Miguel dá um total de R$ 3100,00. Quanto possui Paulo e quanto possui Miguel?

x = valor que Paulo possui
y = valor que Miguel possui

$$\begin{cases} x + y = 1200 \\ 2x + 3y = 3100 \end{cases}$$

Resolver um sistema de duas equações e duas incógnitas, consiste em determinar um par ordenado (x, y) de valores que satisfaçam ao sistema. Vejamos alguns métodos de resolução.

Primeiro método: Conhecido por **método da Substituição**. Vamos explicitar x na primeira equação

$$x = 1200 - y$$

E vamos substituir este valor na segunda equação, obtendo uma equação do primeiro grau em y.

$$2(1200 - y) + 3y = 3100$$

$$2400 - 2y + 3y = 3100$$

$$-2y + 3y = 3100 - 2400$$

$$y = 700$$

Encontrado o valor de y devemos substituí-lo em $x = 1200 - y$ para encontrar x

$$x = 1200 - 700$$

$$x = 500$$

Segundo método: Conhecido por **método da Adição**. Multiplique ambos os membros da primeira equação por (– 3). O objetivo é tornar as duas equações com parcelas iguais e de sinais contrários em uma variável.

$$\begin{cases} x + y = 1200 \\ 2x + 3y = 3100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x - 3y = -3600 \\ 2x + 3y = 3100 \end{cases}$$

. Somando as duas equações membro a membro, obtemos: $-x + 0 = -500$

$$x = 500$$

Devemos substituir $x = 500$ em uma das equações para encontrar y.

$x + y = 1200$

$500 + y = 1200$

$y = 1200 - 500$

$y = 700$

Terceiro método: Conhecido por **método da Comparação**. O método consiste em isolar uma mesma variável nas duas equações, obtendo assim uma equação do primeiro grau na outra variável.

$$\begin{cases} x + y = 1200 \\ 2x + 3y = 3100 \end{cases}$$

$y = 1200 - x$ da primeira equação;

$3y = 3100 - 2x$

$y = \dfrac{3100 - 2x}{3}$ da segunda equação. Por comparação, obtemos a equação do primeiro grau em x:

$1200 - x = \dfrac{3100 - 2x}{3}$

$3600 - 3x = 3100 - 2x$

$-3x + 2x = 3100 - 3600$

$-x = -500$

$x = 500$. Substituindo o valor de x em $y = 1200 - x$ obtemos

$y = 1200 - 500 = 700$

Sistemas equivalentes são aqueles que têm o mesmo conjunto solução.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6x + 9y = 36 \\ 12x + 8y = 52 \end{cases}$$

Um sistema é possível e determinado quando tem uma única solução.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6x + 9y = 36 \\ -6x - 4y = -26 \end{cases}$$

Somando membro a membro as duas euações, obtemos:

$5y = 10$, portanto, $y = 2$.

Substituindo este valor ($y = 2$) na primeira equação, obtemos:

$2x + 6 = 12$

$2x = 12 - 6$

$2x = 6$

$x = 3$

Um sistema é impossível quando não tem solução.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 10 \end{cases}$$

A segunda equação é equivlente a: $3(x + y) = 10$. Como $x + y = 2$, obtemos $3 \times 2 = 10$, o que é uma impossibilidade.

Um sistema é possível e indeterminado quando tem infinitas soluções.

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

Como $x + y = 2$ é equivalente a $2x + 2y = 4$, temos infinitas soluções. Por exemplo, (2, 0), (1, 1), (0, 2), (-1, 3), (-2, 4) são soluções do sistema.

Exercícios de fixação.

Resolver pelo método da adição:

(01) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$ $R: x=4, y=3$

(02) $\begin{cases} x + 5y = 26 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ $R: x=1, y=5$

(03) $\begin{cases} 2x + 3y = 20 \\ x - 2y = -4 \end{cases}$ $R: x=4, y=4$

Resolver pelo método da substituição:

(01) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ x + 2y = 13 \end{cases}$ $R: x=3, y=5$

(02) $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$ $R: x=2, y=3$

(03) $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ x + 2y = 13 \end{cases}$ $R: x=3, y=5$

Sistemas de equações do segundo grau.

Os sistemas a seguir envolverão equações do 1º e do 2º grau. Resolver um sistema envolvendo equações desse modelo requer conhecimentos do método da substituição de termos. Observe as resoluções comentadas a seguir:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases}$$

Isolando y na primeira equação obtemos:

$$y = 6 - x$$

Substituindo o valor de y na outra equação:

$$x^2 + (6 - x)^2 = 20$$

$$x^2 + 36 - 12x + x^2 = 20$$

$$2x^2 - 12x + 36 - 20 = 0$$

$$2x^2 - 12x + 16 = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8$$

$$\Delta = 36 - 32 = 4$$

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$$

$$x = \frac{6 \pm 2}{2}$$

$$x' = 2 \quad ou \quad x'' = 4$$

Usando $y = 6 - x$

$$y = 4 \quad para \quad x = 2$$ e

$$y = 2 \quad para \quad x = 4$$

Se chamarmos de S o conjunto solução do sistema, então podemos afirmar que

$$S = \{(2,4),(4,2)\}$$

Exemplo:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ xy = 20 \end{cases}$$

Isolando y na primeira equação obtemos:

$$y = 9 - x$$

Substituindo o valor de y na outra equação:

$$x\,(9 - x) = 20$$

$$9x - x^2 = 20$$

$$-x^2 + 9x - 20 = 0$$

Multiplicando ambos os membros por (– 1) obtemos:

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \times 1 \times 20$$

$$\Delta = 81 - 80 = 1$$

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$$

$$x = \frac{9 \pm 1}{2}$$

$$x' = 4 \quad ou \quad x'' = 5$$

Usando $y = 9 - x$

$y = 5 \quad para \quad x = 4$ e

$y = 4 \quad para \quad x = 5$

Se chamarmos de S o conjunto solução do sistema, então podemos afirmar que

$$S = \{(4,5),(5,4)\}$$

3.5.1 – Resolver problemas de equações do primeiro grau usando sistemas

1) Um número tem 6 unidades a mais que o outro. A soma deles é 76. Quais são esses números ? (R: 35 e 41)

2) Um número tem 4 unidades a mais que o outro. A soma deles é 150. Quais são esses números? (R: 73 e 77)

3) Fábia tem 5 anos a mais que Marcela. A soma da idade de ambas é igual a 39 anos. Qual é a idade de cada uma? (R: 22 e 17)

4) Marcos e Plínio têm juntos R$ 35.000,00. Marcos tem a mais que Plínio R$ 6.000,00. Quanto tem cada um? (R: 20500 e 14500)

5) Tenho 9 anos a mais que meu irmão, juntos temos 79 anos. Quantos anos eu tenho? (R: 44)

6) O perímetro de um retângulo mede 74 cm. Quais são suas medidas, sabendo-se que o comprimento tem 5 cm a mais que a largura? (R: 16 e 21)

7) Eu tenho R$ 20,00 a mais que Paulo e Mário R$ 14,00 a menos que Paulo. Nós temos juntos R$ 156,00. Quantos reais tem cada um? (R: 70, 50 e 36)

8) A soma de dois números consecutivos é 51. Quais são esses números? (R: 25 e 26)

9) A soma de dois números consecutivos é igual a 145. Quais são esse números? (R: 72 e 73)

10) A soma de um número com seu sucessor é 71. Qual é esse número? (R: 35 e 36)

11) A soma de dois números impares consecutivos é 264. Quais são esses números? (R: 131 e 133)

12) As idades de dois irmãos somam 27 anos e a idade do primeiro é o dobro da idade do segundo. Quais são as idades? (R: 18 e 9)

3.5.2 – Resolver problemas de equações do segundo grau

01) Achar dois números sabendo que a soma e o produto deles valem, respectivamente, 30 e

224.

02) A diferença entre o quadrado de um número e o seu dobro é 35. Qual é o número?

03) Qual é o número que adicionado ao triplo de seu quadrado vale 14?

04) Uma torneira leva ***x*** horas para encher um tanque. Uma segunda torneira leva 2 horas a mais que a primeira. Sabendo que abertas ao mesmo tempo levam 2 horas e 24 minutos para encher o tanque, em que tempo *x* a primeira torneira o faria sozinha ?

A) 3h B) 4h C) 5h D) 6h E) 7h

	Primeira torneira	Segunda torneira
Enche o tanque	$x \quad hs$	$x+2 \quad hs$
Fração do tanque em 1 h	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x+2}$

Fração do tanque em 1 h com as duas torneiras abertas

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2\,hs\,24\,m} \qquad ==> \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{x+120\,m} = \frac{1}{144\,m}$$

05) A metade do quadrado de um número menos o dobro desse número é igual a 30. Determine esse número.

06) Se do quadrado de um número subtrairmos 6, o resto será 30. Qual é esse número?

07) O produto de um número positivo pela sua terça parte é igual a 12. Qual é esse número?

08) Determine dois números consecutivos ímpares cujo produto seja 195.

09) A diferença entre as idades de dois irmãos é 3 e o produto de suas idades é 270. Qual é a idade de cada um?

06) Calcule as dimensões de um retângulo de 16 cm de perímetro e 15 cm^2 de área.

07) A diferença de um número e seu inverso é 8/3. Qual é esse número?

08) Um comboio percorre a distância de 18km com uma velocidade constante, em km/h. Se a velocidade diminuísse de 3km/h, o comboio demoraria mais uma hora no percurso. Então a velocidade do comboio, em km/h, é

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

09) A soma de dois números é 3 e a soma de seus quadrados é 17. O produto desses números é

A) 4 B) –4 C) 5 D) –5 E) 6

10) Uma doceira preparou 315 doces em algumas horas. Para terminar este mesmo serviço duas horas mais cedo, ela precisaria produzir, em média, 10 doces a mais por hora de trabalho. O número médio de doces por ela produzido em cada hora de trabalho correspondeu a:

A) 45 B) 35 C) 21 D) 19 E) 9

11)Numa pesquisa eleitoral, vários jovens foram selecionados para aplicar 240 questionários numa determinada área. No dia marcado, cinco jovens não compareceram e cada um dos demais teve que passar oito questionários a mais. O número de jovens selecionados foi igual a:

A) 30 B) 40 C) 50 D) 60 E) 70

Referências Bibliográficas:

Silva, Sebastião Medeiros da. Matemática para os cursos de economia, administração e contabilidade. 5.ed. São Paulo: Editora Atlas, 1999.

Viveiro, Tânia Cristina Neto G.. Manual Compacto de Matemática: Teoria e Prática. 2.ed. São Paulo: Editora Rideel, 1996.

Giovanni, José Rui; Bonjorno, José Roberto; Giovanni Jr., José Rui, Matemática completa: ensino médio – vol. Único, São Paulo : Editora FTD, 2002.

Lemos, Aluisio Andrade; Higuchi, Fidefico; Fridman, Salomão, Matemática, São Paulo: Editora Moderna, 1976.

Bezerra, Manoel; Jairo, Questões de Matemática, São Paulo: Editora Nacional, 1976.

Sodré, Ulysses; Matemática para o Ensino Fundamental, Médio e Superior; http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/index.html - Out/2007

A Biblioteca Virtual do Estudante Brasileiro – Telecurso 2000 - www.passei.com.br/tc2000/matematica1

KlickEducação O Portal da Educação - http://www.klickeducacao.com.br

Exatas - http://www.exatas.mat.br/index.htm