Módulo 02 – Expressões numéricas, Potenciação e Radiciação

2.1 – Expressões numéricas.

Quando trabalhamos com expressões numércas, as operações a serem efetuadas são priorizadas obedecendo a ordem:

(1) Multiplicação e divisão, na ordem em que aparecem
(2) Soma e subtração, também na ordem em que ocorrem

Quando a expressão apresentar ( ), [ ] e { } a ordem de execução dos cálculos obedece a

(1) os parêntesis
(2) os colchetes
(3) as chaves

Efetua-se as operações entre parênteses. A seguir, efetuam-se as operações entre colchetes, de acordo com a ordem estabelecida. Se existir chaves, efetuam-se as operações entre chaves, também de acordo com a ordem estabelecida. Por fim, calculam-se as operações finais.

Exemplo: $-5+3-7+4=-5-7+3+4=-12+7=-5$

Exemplo: $+5-3-7=+5+(-3-7)=+5+(-10)=+5-10=-5$

Exemplo: $5+(12+3):3=$
$=5+15:3=$
$=5+5=10$

Exemplo: $[(11+12) . 3-9]:15=$
$=[23 . 3-9]:15=$
$=[69-9]:15=$
$=60:15=$
$=4$

Exemplo: $\{15-[2 . (9-12:4)]\}:3=$
$=\{15-[2 . (9-3)]\}:3=$
$=\{15-[2 . 6]\}:3=$
$=\{15-12\}:3=$
$=3:3=$
$=1$

Exercícios:

Resolver as expressões numéricas:

(01) $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} \div \frac{7}{4}$

(02) $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} - \frac{7}{4}$

(03) $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} - \frac{7}{4} \times \frac{2}{3}$

(04) $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{6} - \frac{4}{5} \div \frac{2}{3} - \frac{1}{2}$

(05) $\frac{4}{3} + \frac{7}{5}(\frac{1}{2} + \frac{4}{9}) - \frac{1}{5}$

(06) $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + 1}{\frac{7}{3} - \frac{3}{7} + 9}$

(07) $5 - \{4 + 2[32 - \frac{1}{4}(\frac{4}{6} - \frac{1}{8}) + 2] + 16\ \}$

(08) $3\{-1 + 12[-13 + 4(1 - \frac{1}{3}) - 1] - 1$

Respostas: (01) 8/35 (02) – 27/20 (03) – 23/30 (04) – 21/20

2.2 – Potenciação.

Potenciação é o tipo de multiplicação, em que os fatores são todos iguais.

Exemplo: $\mathbf{10 \cdot 10 = 10^2}$

Exemplo: $\mathbf{10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3}$

Base da potência é o número que é multiplicado várias vezes por ele mesmo (no exemplo acima, é o número 10).

Expoente é o número que indica quantas vezes a base está sendo multiplicada (nos exemplos acima, são os números 2 e 3).

O resultado da potenciação é chamado de **potência**.

Exemplo: $\mathbf{4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64}$

que se lê: **4 elevado à 3ª potência** ou
4 à terceira ou ainda
4 ao cubo

Exemplo: $\mathbf{5^2 = 5 \cdot 5 = 25}$

Exemplo: $\mathbf{2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32}$

2.2.1 – Observações importantes:

1. Se a base é igual a 1 e o expoente é qualquer número, maior ou igual a 0, então a potência é sempre igual a 1.

Exemplo: $\mathbf{1^5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1}$
$\mathbf{1^1 = 1}$
$\mathbf{1^0 = 1}$

2. Se o expoente é igual a 1 e a base é qualquer número, maior ou igual a 0, então a potência é sempre igual à base.

Exemplo: $\mathbf{3^1 = 3}$
$\mathbf{1^1 = 1}$
$\mathbf{0^1 = 0}$

3. Se a base é zero e o expoente é qualquer número, maior do que zero, então a potência é sempre igual a zero.

Exemplo: $\mathbf{0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0}$

Observação: $\mathbf{0^0}$ **= indeterminado**

4. Se a base é 10 e o expoente é qualquer número, maior ou igual a 0, então a potência é um número que começa com 1 e tem um número de zeros igual ao expoente.

Exemplo: $\mathbf{10^0 = 1}$
$\mathbf{10^1 = 10 \cdot 10 = 100}$
$\mathbf{10^2 = 10 \cdot 10 = 100}$
$\mathbf{10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100.000}$

5. Se a base é um número qualquer, maior do que 0, e o expoente é zero, então a

potência, é sempre igual a 1.

Exemplo: $\mathbf{3^0 = 1}$
$\mathbf{35^0 = 1}$
$\mathbf{358^0 = 1}$

Observe o seguinte: $\mathbf{3^4 = 81}$
$\mathbf{3^3 = 27}$
$\mathbf{3^2 = 9}$
$\mathbf{3^1 = 3}$
$\mathbf{3^0 = 1}$

2.2.2 – Regras da potenciação.

Primeira propriedade: Produto de potências de mesma base

$$5^3 \cdot 5^4 = (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) =$$
$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 =$$
$$5^{(3+4)} = 5^7$$

Para multiplicar potências de mesma base, repetimos a base e somamos os expoentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Segunda propriedade: Divisão de potências de mesma base

$$5^7 / 5^4 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) / (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) =$$
$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^{(7-4)} = 5^3$$

Para dividir potências de mesma base, repetimos a base e subtraímos os expoentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Terceira Propriedade: Potenciação de potência

$$(3^2)^3 = 3^2 \bullet 3^2 \bullet 3^2 = 3^{2+2+2} = 3^{2\cdot3} = 3^6$$

Para elevar uma potência a um outro expoente, repetimos a base e multiplicamos os expoentes.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Quarta propriedade: Distributividade em relação à multiplicação e à divisão

Para elevar um produto ou um quociente a um expoente, elevamos cada fator a esse expoente ou, no caso do quociente, elevamos o dividendo e o divisor ao mesmo expoente.

$$(a \times b)^m = a^m \times b^m$$

$$(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Exemplo: (1) $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 2016$

(2) $(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = -64$

(3) $(-2)^7 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -128$

Exemplo: Diga se as seguintes igualdades são verdadeiras ou falsas, usando **V** ou **F**:

(1) $5^6 \times 5^{-6} \times 6 = 1$ **[ ]**

(2) $3^3 \times 3^5 \times 3 = 9^9$ **[ ]**

(3) $\frac{5^{-1}}{7^{-1}} = \frac{7}{5}$ **[ ]**

(4) $2^{-3} + 3^{-2} = \frac{1}{2^3 + 3^2}$ **[ ]**

(5) $2^{2^2} = 4^2$ **[ ]**

Respostas: (1) **[F]** (2) **[V]** (3) **[V]** (4) **[F]**

(5) **[V]**

2.3 – Radiciação

Chama-se raiz quadrada de a o número real b, tal que: $b^2 = a$

$$\sqrt{a} = b \quad <=> \quad b^2 = a$$

Exemplo: $\sqrt{16} = 4 \quad pois \quad 4^2 = 16$

$\sqrt{25} = 5 \quad pois \quad 5^2 = 25$

$\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5} \quad pois \quad \frac{1}{5}^2 = \frac{1}{25}$

Chama-se raiz cúbica de a o número real b, tal que: $b^3 = a$

$$\sqrt[3]{a} = b \qquad <=> \qquad b^3 = a$$

Exemplo: $\sqrt[3]{8} = 2 \quad pois \quad 2^3 = 8$

$$\sqrt[3]{-27} = -3 \quad pois \quad (-3)^3 = -27$$

Chama-se raiz quarta de a o número real b, tal que: $b^4 = a$

$$\sqrt[4]{a} = b \qquad <=> \qquad b^4 = a$$

Exemplo: $\sqrt[4]{16} = 2 \quad pois \quad 2^4 = 16$

Chama-se raiz enésima de a o número real b, tal que: $b^n = a$

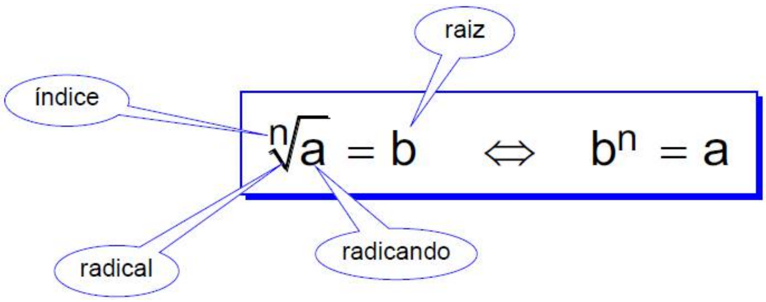
$$\sqrt[n]{a} = b \qquad <=> \qquad b^n = a$$

Exemplo: $\sqrt[4]{16} = 2 \quad pois \quad 2^4 = 16$

$$\sqrt[5]{32} = 2 \quad pois \quad 2^5 = 16$$

$$\sqrt[7]{-1} = -1 \quad pois \quad (-1)^7 = -1$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2 \quad pois \quad (-2)^5 = -32$$



Observações:

1) Se $a \geq 0$ então, a raiz nésima de a é sempre igual a $b \geq 0$ qualquer que seja n par ou impar.

Exemplo: $\sqrt[4]{16} = 2 \quad pois \quad 2^4 = 16$

$$\sqrt[5]{32} = 2 \quad pois \quad 2^5 = 16$$

2) Não existe raiz de índice par de um número negativo.

Exemplo: $\sqrt[4]{-16} = \quad não\, existe$

$$\sqrt{-9} = \quad não\, existe$$

3) Se $a < 0$ então, a raiz nésima de a é sempre igual a $b < 0$ qualquer que seja n impar.

Exemplo: $\sqrt[3]{-8} =$ *pois* $(-2)^3 = -8$

$\sqrt[5]{-32} = -2$ *pois* $(-2)^5 = -32$

2.3.1 – Propriedades dos radicais

(P1) $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$

Exemplo: $(\sqrt[3]{4})^3 = \sqrt[3]{4^3} = 4$

$(\sqrt[5]{-3})^5 = \sqrt[n]{(-3)^5} = -3$

(P2) A raiz nésima de um produto é igual ao produto das raízes nésimas dos fatores.

$\sqrt[n]{a\,b} = \sqrt[n]{a}\;\sqrt[n]{b}$

Exemplo: $\sqrt{4.9} = \sqrt{4} \;.\; \sqrt{9} = 2.3 = 6$

$\sqrt[3]{8.27} = \sqrt[3]{8}\;\sqrt[3]{27} = 2.3 = 6$

(P3) A raiz enésima de um quociente é igual ao quociente das raízes enésimas dos termos da divisão.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Exemplo: $\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \dfrac{2}{3}$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$$

(P4) $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

Exemplo: $\sqrt{2^3} = 2^{3/2}$

$\sqrt[5]{2^3} = 2^{3/5}$

2.3.2 – Adição e subtração de radicais.

A **adição** e **subtração** de radicais é realizada quando os radicais são semelhantes.

Exemplo: $4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

$\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{48} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

2.3.2 – Multiplicação e divisão de radicais.

A **multiplicação** e a **divisão** de radicais é realizada quando os radicais são de mesmo índice. Neste caso, multiplicamos ou dividimos os radicandos conservando os índices.

$$\sqrt{20}.\sqrt{5} = \sqrt{20.5} = \sqrt{100} = 10$$

$$\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{75}{12}} = \sqrt{\frac{25.3}{4.3}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$\sqrt[5]{10} \div \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{5}$$

Se os radicais tiverem índices diferentes, deve-se tirar o MMC dos índices, dividir o MMC pelos índices antigos e multiplicar o resultado pelos expoentes dos radicandos.

$$\sqrt{2} \;.\; \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^3} \;.\; \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2^3 \;.\; 2^2} = \sqrt[6]{2^5}$$

$$\sqrt[4]{5^3} \;.\; \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[12]{5^9} \;.\; \sqrt[12]{5^8} = \sqrt[12]{5^9 \;.\; 5^8} = \sqrt[12]{5^{17}} = \sqrt[12]{5^{12}.5^5} =$$

$$= \sqrt[12]{5^{12}} \;.\; \sqrt[12]{5^5} = 5.\sqrt[12]{5^5}$$

2.3.2 – Racionalização de denominadores.

Considere a fração $\frac{5}{\sqrt{3}}$, cujo denominador é um número irracional. Vamos agora multiplicar o numerador e o denominador desta fração por $\sqrt{3}$, obtendo uma fração equivalente:

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{5.\sqrt{3}}{3}$$

Observe que a fração equivalente possui um denominador racional. A essa transformação, damos o nome de **Racionalização de denominadores.**

Exemplo: Raiz quadrada no denominador

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{5.\sqrt{3}}{3}$$ Fator racionalizante: $\sqrt{3}$

Exemplo: Raiz de índice maior que 2 no denominador

$$\frac{5}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5.\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{2^2}} = \frac{5.\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{5.\sqrt[3]{4}}{2}$$ Fator racionalizante: $\sqrt[3]{2^2}$

$$\frac{3}{\sqrt[4]{5}} = \frac{3.\sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[4]{5}.\sqrt[4]{5^3}} = \frac{3.\sqrt[4]{125}}{\sqrt[4]{5^4}} = \frac{3.\sqrt[4]{125}}{5}$$ Fator racionalizante: $\sqrt[4]{5^3}$

Fator racionalizante: $\sqrt[7]{5^3}$

Exemplo: Adição ou subtração de radicais no denominador

$$\frac{5}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{5.(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{5.(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3 - 2} = 5.(\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

Fator racionalizante: $\sqrt{3} + \sqrt{2}$

$$\frac{5}{3 - \sqrt{2}} = \frac{5.(3 + \sqrt{2})}{(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2})} = \frac{5.(3 + \sqrt{2})}{9 - 2} = \frac{5.(3 + \sqrt{2})}{7}$$

Fator racionalizante: $3 + \sqrt{2}$

$$\frac{5}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} = \frac{5.(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})}{2(\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{5.(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})}{12 - 18} = \frac{5.(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})}{-6} = \frac{-5}{6}(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})$$

Fator racionalizante: $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$

Exemplos:

1) 5 . (64 - 12 : 4) =
5 . (64 - 3) =
5 . 61 = 305

2) 480 : { 20 . [86 - 12 . (5 + 2)] ^{2} } =
480 : { 20 . [86 - 12 . 7] ^{2} } =
480 : { 20 . [86 - 84] ^{2} } =
480 : { 20 . [2] ^{2} } =
480 : { 20 . 4 } =
480 : 80 = 6

3) - [- 12 - (- 5 + 3)] =
- [- 12 - (- 2)] =
- [- 12 + 2] =
- [- 10] = + 10

4) $25 + \{14 – [25 \text{ x } 4 + 40 – (20 \div 2 + 10)]\} =$

$25 + \{14 – [25 \text{ x } 4 + 40 – (10 + 10)]\} =$

$25 + \{14 – [25 \text{ x } 4 + 40 – (20)]\} =$

$25 + \{14 – [25 \text{ x } 4 + 40 – 20]\} =$

$25 + \{14 – [100 + 40 – 20]\} =$

$25 + \{14 – [120]\} =$

$25 + \{14 – 120\} =$

$25 + \{- 106\} =$

$25 – 106 =$

$– 81$

5) $3 \cdot \{ 4^2 – [5 \cdot 2^3 + 7 \cdot (9^2 – 80)]\} =$
$3 \cdot \{ 16 – [5 \cdot 8 + 7 \cdot (81 – 80)]\} =$

$3 \cdot \{ 16 – [5 \cdot 8 + 7 \cdot 1]\} =$

$3 \cdot \{ 16 – [40 + 7]\} =$

$3 \cdot \{ 16 – [47]\} =$

$3 \cdot \{ 16 – 47 \} =$

$3 \cdot \{–31\} =$

$– 93$

6) $\{[(8 \cdot 4 + 3) \div 7 + (3 + 15 \div 5) \cdot 3] \cdot 2 – (19 – 7) \div 6\} \cdot 2 + 12 = ?$
(R: 100)

7) O valor da expressão $20x^3 + 2x^2y^5$, para $x = - 4$ e $y = 2$ é:
(R: - 256)

8) Se $5^{3a} = 64$, o valor de 5^{-a} é:
(R: 1/8)

9) O valor de $(0,2)^3 + (0,16)^2$ é:
(R: 0,0336)

10) O valor de $(0,2)^{-3} + (0,16)^{-2}$ é:
(R: 164,0625)

11) (UNIP) O valor de

$\sqrt{8 + \sqrt{14 + \sqrt[3]{6+\sqrt{4}}}}$ é igual a:

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $3\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{6}$ D) $2\sqrt{5}$ (E) $5\sqrt{2}$

Referências Bibliográficas:

Silva, Sebastião Medeiros da. Matemática para os cursos de economia, administração e contabilidade. 5.ed. São Paulo: Editora Atlas, 1999.

Viveiro, Tânia Cristina Neto G.. Manual Compacto de Matemática: Teoria e Prática. 2.ed. São Paulo: Editora Rideel, 1996.

Giovanni, José Rui; Bonjorno, José Roberto; Giovanni Jr., José Rui, Matemática completa: ensino médio – vol. Único, São Paulo : Editora FTD, 2002.

Lemos, Aluisio Andrade; Higuchi, Fidefico; Fridman, Salomão, Matemática, São Paulo: Editora Moderna, 1976.

Bezerra, Manoel; Jairo, Questões de Matemática, São Paulo: Editora Nacional, 1976.

Sodré, Ulysses; Matemática para o Ensino Fundamental, Médio e Superior; http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/index.html - Out/2007

Telecurso 2000 - Matemática - **http://www.bibvirt.futuro.usp.br/** -
http://www.bibvirt.futuro.usp.br/textos/telecurso_2000

Telecurso 2000 - Matemática - **http://www.bibvirt.futuro.usp.br/** -
http://www.bibvirt.futuro.usp.br/textos/telecurso_2000

KlickEducação O Portal da Educação - http://www.klickeducacao.com.br
Exatas - http://www.exatas.mat.br/index.htm

Só Matemática- http://www.somatematica.com.br/

Matemática.com.br - http://matematica.com.br/

http://vestibular.uol.com.br/resumo-das-disciplinas/matematica/

http://educacao.uol.com.br/matematica/ensino_medio.jhtm

http://www.priklady.eu/en/Mathematics/Algebraic-Expressions.alej

http://www.profcardy.com/cardicas/exercicios/semana_02_1.htm

http://blog.educacaoadventista.org.br/tioney/arquivos/lista-fatoracao.pdf