Módulo 05 – Conjuntos. Relações. Funções. Função Afim. Função Quadrática. Inequações do primeiro grau. Inequações do segundo grau.

5.1 – Conjuntos.

Conjunto é qualquer coleção de objetos bem definida. Conjunto representa uma coleção de objetos. É uma classe, uma família, portanto constituído de elementos.

Notamos um conjunto por uma letra maiúscula: A, B, C, X, Y.

Os objetos que constituem o conjunto são chamados elementos e serão notados por letras minúsculas: a, b, x, y.

A teoria dos conjuntos foi criada recentemente por Georg Cantor (1845 – 1918) que definiu conjunto como sendo uma coleção de objetos distintos, chamados elementos, e que podem ser pensados como um todo.

Exemplo: A = {a, e, i, o, u}

$a \in A$ <=> a é elemento de A
$b \notin A$ <=> b não é elemento de A

Exemplo: Conjuntos mais importantes.

$R \;=\; x\,;\, x\,\text{é um número real}$

$Q \;=\; x\,;\, x\,\text{é um número racional}$

$Z \;=\; x\,;\, x\,\text{é um número inteiro}$

$N \;=\; x\,;\, x\,\text{é um número natural}$

$\varnothing \;=\; \{\;\;\} \;=\; \text{conjunto vazio}$

$A \;=\; \{5\} \;=\; \text{conjunto unitário}$

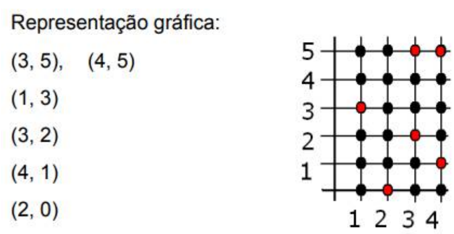
5.2 – Relações

Par ordenado: chamamos de par ordenado ao elemento (x, y) formado pelos elementos x, y.
Para localizar um ponto no plano, utilizamos dois números reais, numa certa ordem.

(x, y)	x – primeiro elemento	x – abcissa
	y – segundo elemento	y - ordenada

x, y são chamados de coordenadas

De um modo geral, sendo x e y dois números reais quaisquer, temos $(x, y) \neq (y, x)$.



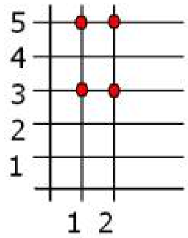
Dados dois conjuntos A e B, não vazios, chamamos de produto cartesiano de A por B ao conjunto A X B, definido por:

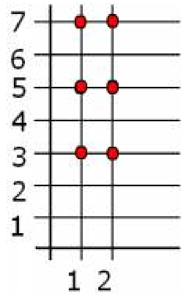
$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B \}$$

Exemplo 1: A = { 1, 2 } B = { 3, 5 }

$$A \times B = \{ (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\}$$

Exemplo 2: A = { 1, 2 } B = { 3, 5, 7 }
A X B = { (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 3), (2, 5), (2, 7)}





Dados dois conjuntos, A e B, não vazios, chamamos de relação binária R de A em B qualquer subconjunto R do produto cartesiano A X B

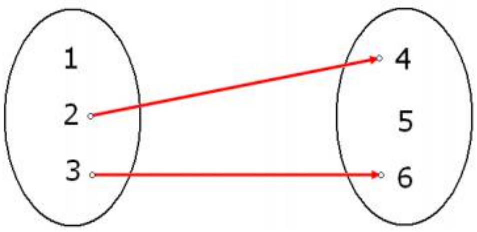
$$R \subset A \times B$$

O conjunto A é chamado de domínio de R. D(R) = A
O conjunto B é chamado de contradomínio de R. CD(R) = B
Os elementos de A são representados por x e os elementos de B são representados por y.
O conjunto formado por todos os y pertencentes à relação R chamamos de imagem.

Exemplo: A = { 1, 2, 3 } B = { 4, 5, 6 }
A X B = {(1, 4), (1, 5), (1, 6), ... (3, 4), (3, 5), (3, 6)}

R = { (x, y) ∈ A X B | y = 2x }, i. é., R = { (2, 4), (3, 6) }

D(R) = {1, 2, 3} CD(R) = {4, 5, 6} Im(R) = {4, 6}



Exemplo: A = { 1, 2, 3 } B = { 4, 5, 6 }
A X B = {(1, 4), (1, 5), (1, 6), ... (3, 4), (3, 5), (3, 6)}

R = { (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 6) }

D(R) = {1, 2, 3} CD(R) = {4, 5, 6} Im(R) = {4, 5, 6}

5.3 – Funções. Conceituação.

Um dos conceitos mais utilizados em Matemática é o de função. Ele se aplica a várias áreas, como à Física, à Química, à Economia e à Biologia. Além disso, está muito presente em nosso dia-a-dia, ajudando a melhor compreender o mundo que nos cerca. Vejamos alguns exemplos da aplicação desse conceito:

a dose de um remédio é função do peso da criança que é medicada;
a altura de uma criança é função de sua idade;
o salário de um vendedor é função do volume de vendas;
a área de um quadrado é função da medida de seus lados;
o consumo mensal de combustível é função da quilometragem percorrida.

Para entender o conceito de função vamos pensar em duas grandezas que variam, sendo que a variação de uma depende da variação da outra.

Considere a seguinte situação salarial:

Uma empresa comercial paga mensalmente a cada vendedor um salário fixo de R$ 600,00 acrescidos de um percentual de *5%* sobre o seu total de vendas.

Dizemos então que o salário mensal de cada vendedor é função do seu total de vendas, podendo ser equacionado como segue:

$y = 5\% \, x + 600{,}00$ ou ainda

$y = 0{,}05\, x + 600{,}00$

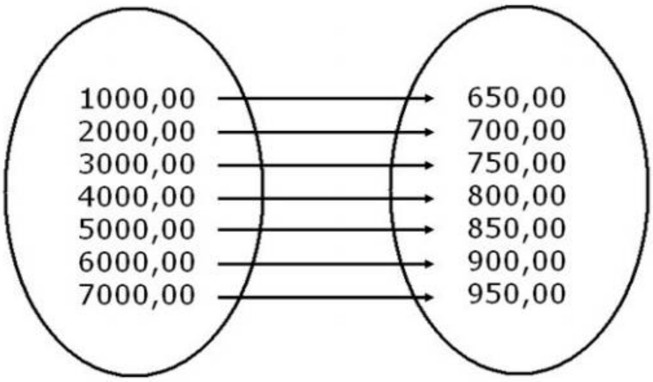
onde x corresponde ao total de vendas e y ao salário do vendedor. Neste caso, dizemos que y é função de x, pois a variação de y depende da variação de x.

Podemos representar uma função mediante uma tabela, através de uma representação por diagrama ou por intermédio de um gráfico.

A tabela a seguir representa a função $y = 0{,}05\, x + 600{,}00$ do exemplo acima

x	y
1.000,00	650,00
2.000,00	700,00
3.000,00	750,00
4.000,00	800,00
5.000,00	850,00
6.000,00	900,00
7.000,00	950,00

Uma outra forma de representarmos uma função é por diagramas. O diagrama a seguir representa a função $y = 0{,}05\, x + 600{,}00$ do exemplo acima



O conjunto A é o conjunto dos números que expressam o total de vendas e o conjunto B é o conjunto dos salários do vendedor.

A cada elemento de A, corresponde um único elemento de B, ou seja, para cada total de vendas, temos um único salário.

Podemos também representar uma função graficamente. Para isso, vamos usar o plano cartesiano.

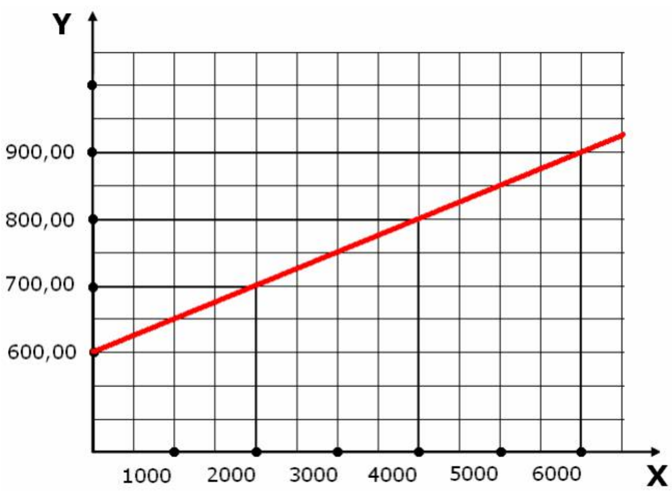
No eixo horizontal, também conhecido como eixo *x* ou eixo das abscissas, vamos marcar os valores de *x* (totais de vendas) que constam na tabela.

No eixo vertical, também conhecido como eixo *y* ou eixo das ordenadas, vamos marcar os valores de *y* (valor do salário) para cada valor de *x*.

Observe no gráfico, a associação entre os valores de *x* com os valores correspondentes de *y*, como

(0, 600,00),
(2000, 700,00),
(4000, 800,00) e
(6000, 900,00).

Unindo os pontos do plano correspondentes as associações, obtemos o gráfico a seguir:



Taxa de variação é a medida de variação de uma grandeza em relação a outra.

Numa função, temos duas variáveis. Para calcular a taxa de variação, verificamos como *y* varia em função de *x*. Isso é feito dividindo-se a diferença dos valores de *y* pela diferença dos valores correspondentes de *x*.

$$t_v = \frac{700 - 600}{2000 - 0} = \frac{100}{2000} = 0{,}05$$

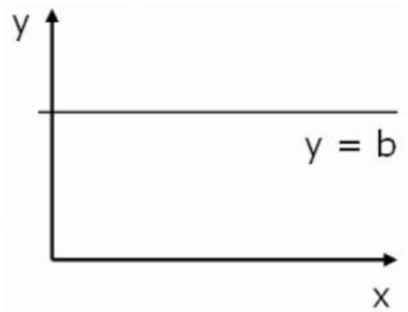
$$t_v = \frac{800 - 700}{4000 - 2000} = \frac{100}{2000} = 0{,}05$$

5.3.1 - A função $y = ax + b$.

No exemplo do salário do vendedor, vimos que a função que representa o seu salário é da forma $y = ax + b$ e que tem para gráfico uma reta.

Se $a = 0$, a nossa função fica com a forma $y = b$

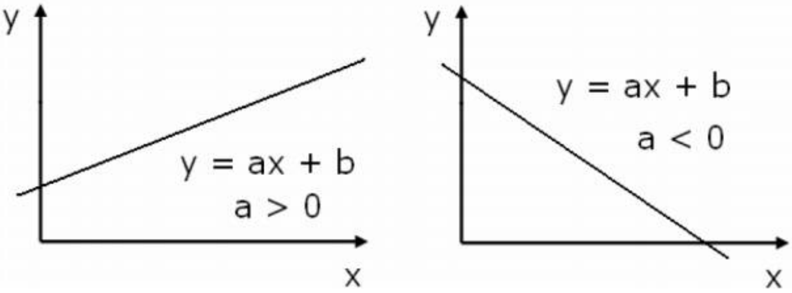
Seu gráfico vai ser uma reta horizontal.



Se $a \neq 0$, a expressão $y = ax + b$ chama-se função do primeiro grau.

Se $a > 0$ (a positivo) ela é uma função crescente (taxa de variação positiva)

Se $a < 0$ (a negativo), ela é uma função decrescente (taxa de variação negativa).



Exemplo:	$y = x + 1$	$y = - x + 4$
	$x = 0 \;\; => \;\; y = 1$	$x = 0 \;\; => \;\; y = 4$
	$x = 2 \;\; => \;\; y = 3$	$x = 2 \;\; => \;\; y = 2$

5.3.2 - Gráfico da função $y = ax + b$.

Toda função polinomial representada pela relação $y = ax + b$, com a e b números reais e $a \neq 0$, é chamada de função afim.

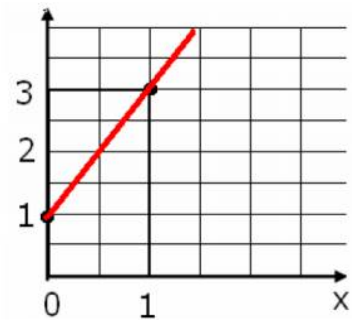
O gráfico de uma função afim é sempre uma reta.

Para fazer o gráfico de uma função afim, escolha dois valores para x, e determine os valores correspondentes de y, formando uma tabela. Veja o exemplo a seguir:

Exemplo: y = $2x + 1$

x	y
0	1
1	3

Marcamos no gráfico, os pontos $(0, 1)$ e $(1, 3)$. A reta que passa por esses pontos é o gráfico de $y = 2x + 1$.



O número real a, coeficiente de x, chama-se coeficiente angular ou declividade da reta. Corresponde a taxa de variação da função.

O termo constante b chama-se coeficiente linear.

Exemplo 01:	(1) $y = 2x - 3$	$a = 2;$	$b = -3$
	(2) $y = -3x + 4$	$a = -3;$	$b = 4$
	(3) $y = -0.5x + 5$	$a = -0,5;$	$b = 5$
	(4) $y = 7 - x$	$a = -1;$	$b = 7$

Exemplo 02: Dada a função $f(x) = 2x - 3$ calcular:

(1) $f(2)$ (2) $f(-3)$ (3) $f(0)$ (4) $f(h - 2)$

(1) $f(2) = 2 \times 2 - 3 = 4 - 3 = 1$
(2) $f(-3) = 2 \times (-3) - 3 = -6 - 3 = -9$
(3) $f(0) = 2 \times 0 - 3 = 0 - 3 = -3$
(4) $f(x-2) = 2 \times (h-2) - 3 = 2h - 4 - 3 = 2h - 7$

5.3.3 – Zeros da função *y = ax + b*.

Denomina-se zero ou raiz da função $y = ax + b$ o valor de x que anula a função.

$$y = 0 \Leftrightarrow$$
$$a\,x + b = 0 \Leftrightarrow$$
$$a\,x = -b \Leftrightarrow$$
$$x = -b/a$$

Exemplos: (1) $f(x) = -3x + 5$
$$-3x + 5 = 0$$
$$-3x = -5$$
$$x = 5/3$$

(2) Encontre os zeros das funções:

1. $f(x) = 10 + x - (9 - 2x)$

2. $f(x) = \dfrac{10x - 4}{6} - \dfrac{8x - 20}{4}$

5.4 – Funções do segundo grau

Chama-se função quadrática, qualquer função f de R em R, definida pela lei de formação
$$y = f(x) = ax^2 + bx + c,$$
onde a, b, c são números reais com $a \neq 0$.

Funções são fórmulas matemáticas que associam a cada número de um conjunto numérico (chamado de domínio) um único número pertencente a outro conjunto (chamado de contradomínio).

Quando essa função envolve um trinômio do segundo grau, temos uma função do segundo grau.

Aplicações:

Movimento uniformemente variado (Física);
lançamento oblíquo (Física);
processo de fotossíntese das plantas (Biologia);
as funções de custo, receita e lucro (Adm e Cont);
nas diversas construções (Eng. Civil).

Exemplos:
1) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$; $a = 3$, $b = -4$, $c = 1$
2) $f(x) = x^2 - 4x$; $a = 1$, $b = -4$, $c = 0$
3) $f(x) = x^2 - 1$; $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$
4) $f(x) = x^2 + 4x + 4$; $a = 1$, $b = 4$, $c = 4$

5.4.1 – Zeros ou raízes da função quadrática

Os zeros de uma função são os valores de x para os quais a função se anula ($f(x) = 0$).

Exemplo:
$$y = x^2 - 4$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$(x-2)(x+2)=0$$
$$x-2=0 \quad ou \quad x+2=0$$
$$x=2 \quad ou \quad x=-2$$

Exemplo:
$$y=x^2+6x$$
$$x^2+6x=0$$
$$x(x+6)=0$$
$$x=0 \quad ou \quad x+6=0$$
$$x=0 \quad ou \quad x=-6$$

Exemplo:
$$y=x^2-6x+9$$
$$x^2-6x+9=0$$
$$(x-3)(x-3)=0$$
$$x-3=0 \quad ou \quad x-3=0$$
$$x=3 \quad ou \quad x=3$$

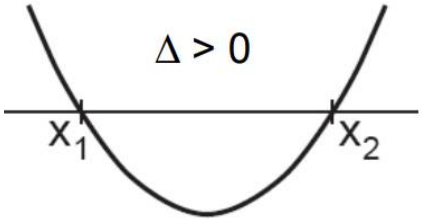
Exemplo:
$$y=x^2-6x+8$$
$$x^2-6x+8=0$$
$$(x-2)(x-4)=0$$
$$x-2=0 \quad ou \quad x-4=0$$
$$x=2 \quad ou \quad x=4$$

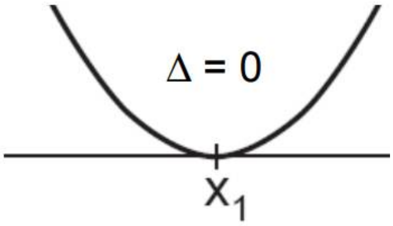
Exemplo:
$$y=x^2-5x+6$$
$$x^2-5x+6=0$$
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=(-5)^2-4\times1\times6$$
$$\Delta=25-24$$
$$\Delta=1$$
$$x = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x = \frac{5\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{5\pm1}{2}$$
$$x = 3 \quad ou \quad x = 2$$

$$y=f(x)=ax^2+bx+c \qquad f(x)=0$$

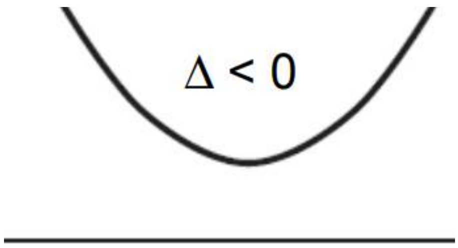
$\Delta > 0$
A equação tem duas raízes diferentes. A parábola corta o eixo dos x em dois pontos distintos.

$\Delta = 0$
A equação tem duas raízes iguais. A parábola corta o eixo dos x em dois pontos iguais, isto é, tangencia o eixo dos x.





$\Delta < 0$
A equação não possui raízes. A parábola não corta o eixo dos x.



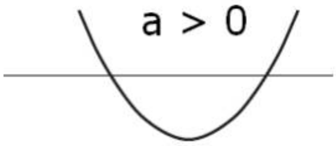
5.4.2 – O vértice da função do segundo grau $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

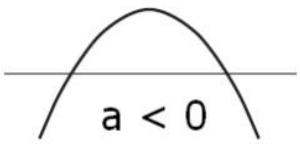
$$x_v = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-2b}{2a}\right)$$

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

5.4.3 – Concavidade da função quadrática.

Se a > 0, a concavidade estará voltada para cima. Se a < 0, a concavidade estará voltada para baixo.





5.4.4 – Gráfico da função quadrática

Para desenhar o gráfico de uma função, é preciso avaliar qual elemento do contradomínio está relacionado com cada elemento do domínio e marcá-los, um a um, em um plano cartesiano. Quando todos esses pontos forem marcados, o resultado será justamente o gráfico da função.

Como a função quadrática

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c,$$

onde $a,\ b,\ c$ são números reais com $a \neq 0$, está definida para todo x real, podemos dizer que o seu domínio é o conjunto dos números reais. O gráfico de uma função quadrática será sempre uma parábola.

Passos que devemos seguir para a construção do gráfico da função quadrática:

Passo 1: O coeficiente a indica a direção de sua concavidade, ou seja, se a > 0, a parábola terá a concavidade voltada para cima, e neste caso, possuirá um ponto de mínimo. Se a < 0, a parábola terá a concavidade voltada para baixo, e neste caso, possuirá um ponto de máximo.

Passo 2: Um dos pontos da parábola é obtido com $x = 0$, isto é, $y = f(0) = c$.

Passo 3: Quando existem, as raízes podem ser incluídas no desenho do gráfico de uma função do segundo grau. Para encontrá-las, faça $y = 0$ para obter uma equação do segundo grau que, resolvida, nos dará as raízes. Isto vai acontecer quando $\Delta \geq 0$.

Passo 4: Se a função possui raízes, também é possível calcular o x_v como a média aritmética das raízes, x_1 e x_2 :

$$x_v = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

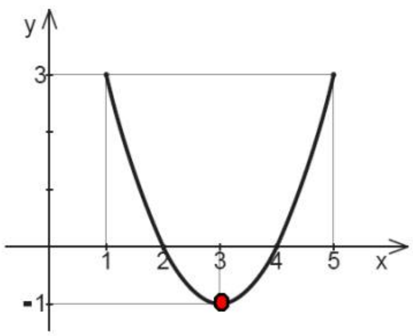
Se $\Delta = 0$ então $x_1 = x_2$, isto é, o vértice é a própria raiz da função. Encontrado o x_v , podemos encontrar o y_v fazendo $y_v = f(x_v)$ ou $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$

Passo 5: Marcar todos os pares ordenados obtidos no plano cartesiano e ligá-los, de modo a construir uma parábola. Os pares coordenados podem ser obtidos fornecendo valores para x a partir do x_v .

$y = f(x) = x^2 - 6x + 8$

Exemplo:

	x	y
	1	3
$x_1 = 2$	2	0
$\frac{x_1 + x_2}{2} = 3$	3	-1
$x_2 = 4$	4	0
	5	3



Observe que os coeficientes dessa função quadrática são a = 1, b = – 6 e c = 8, dessa maneira podemos afirmar que:

Passo 1: A concavidade da parábola estará voltada para cima pois a = 1 > 0

Passo 2: Um dos pontos da parábola é $y = f(0) = 8$

Passo 3: Como $\Delta > 0$ encontramos duas raizes $x_1 = 2 \ e \ x_2 = 4$

Passo 4: O vértice da parábola tem para coordenadas $x_v = \frac{-b}{2a} = 3$ e $y_v = f(3) = -1$

Passo 5: A partir do x do vértice ($x = 3$), escolhemos valores para x e contruimos a tabela acima.

Exercícios: Faça o gráfico das funções seguindo os passos acima:

$(1) \quad y = x^2 - 6x + 7$

$(2) \quad y = x^2 - 4x + 5$

$(3) \quad y = -x^2 + 6x - 5$

$(4) \quad y = x^2 + 2$

5.5 – Inequações do primeiro e segundo grau

Inequação é uma desigualdade matemática que apresenta pelo menos um valor desconhecido (incógnita).

Nas inequações usamos os símbolos:

$>$	maior que
$<$	menor que
$\geq$	maior que ou igual
$\leq$	menor que ou igual

Exemplos:

1) $2(x - 4) + 5(3x - 1) > 4$

2) $10 + 2(x - 5) \leq 20 - 3x$

3) $x^2 - 5x + 4 < 0$

4) $(x - 2)^2 + 5(x - 2) + 8 > 2$

5.5.1 – Inequações do primeiro grau

Uma inequação é do 1º grau quando o maior expoente da incógnita é igual a 1.

Podem assumir os seguintes formatos:

$ax + b > 0$

$ax + b < 0$

$ax + b \geq 0$

$ax + b \leq 0$

Sendo a e b números reais e $a \neq 0$

Resolvemos uma inequação do primeiro grau, da mesma forma que fazemos com as equações, devendo ter cuidado quando a multiplicarmos ou dividirmos por um número negativo.

Exemplo: Resolver a inequação

$15 - 7x \geq 2x - 30$

$- 7x - 2x \geq - 30 - 15$

$- 9x \geq - 45$

Multiplicando a inequação por (- 1) obtemos:

$9x \leq 45$ (observe que o símbolo $\geq$ se inverte para $\leq$)

$x \leq 45/9$

$x \leq 5$ Solução: $\mathbf{x \leq 5}$.

Resolução usando o gráfico da inequação

Passos:

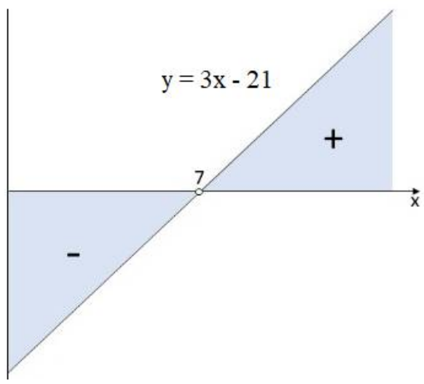
1º) Colocar a inequação em uma das formas a seguir:

$ax + b > 0$ $ax + b < 0$ $ax + b \geq 0$ $ax + b \leq 0$

2º) Fazer o estudo do sinal da função $y = ax + b$.

Exemplo: $3x – 21 < 0$

Solução: $x < 7$



5.5.2 – Inequações do segundo grau

Estudo do sinal do trinômio do segundo grau

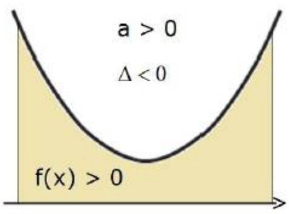
O estudo do sinal depende do coeficiente a e do discriminante Δ. Ele e obtido analisando a concavidade da parábola.

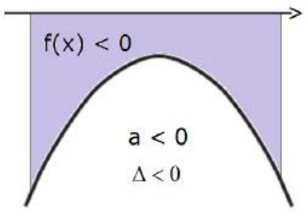
Caso $\Delta < 0$:

Neste caso, a parábola não corta o eixo das abcissas. Portanto:

$a > 0 \;\Rightarrow\; f(x) > 0$ para todo x real

$a < 0 \;\Rightarrow\; f(x) < 0$ para todo x real



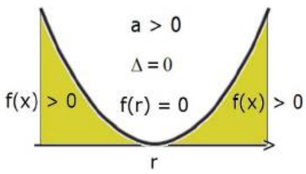


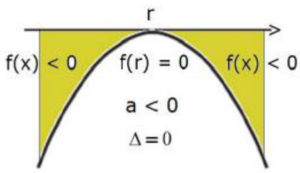
Caso $\Delta = 0$:

Neste caso, a parábola corta o eixo das abcissas em apenas um ponto $x = r$. Portanto:

$a > 0 \;\Rightarrow\; f(x) > 0$ para todo x real, $x \neq r$

$a < 0 \;\Rightarrow\; f(x) < 0$ para todo x real, $x \neq r$





Caso $\Delta > 0$:

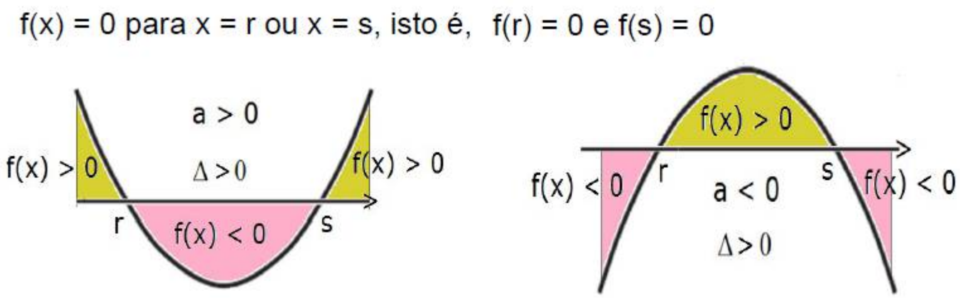
Neste caso, a parábola corta o eixo das abcissas em dois pontos $x = r$ e $x = s$ $(r < s)$. Portanto:

$a > 0 \;\Rightarrow\; f(x) > 0$ para todo x real, $x < r$ ou $x > s$

$f(x) < 0$ para todo x real, $r < x < s$

$a < 0 \;\Rightarrow\; f(x) < 0$ para todo x real, $x < r$ ou $x > s$

$f(x) > 0$ para todo x real, $r < x < s$



Uma **Inequação do 2º Grau** é uma inequação que pode ser reduzida à forma:

$a x^2 + b x + c > 0$ ou

$a x^2 + b x + c < 0$ ou

$a x^2 + b x + c \geq 0$ ou

$a x^2 + b x + c \leq 0$

Exemplo: $x^2 + 6 \geq 5x$

$x^2 - 5x + 6 \geq 0$ $\qquad a = 1 > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6$

$\Delta = 25 - 24 = 1$ $\qquad \Delta = 1 > 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0$ => $x = 2 \ ou \ x = 3$

$x^2 - 5x + 6 > 0$ => $x < 2 \ ou \ x > 3$

=> $x \leq 2 \ ou \ x \geq 3$

Referências Bibliográficas:

Silva, Sebastião Medeiros da. Matemática para os cursos de economia, administração e contabilidade. 5.ed. São Paulo: Editora Atlas, 1999.

Viveiro, Tânia Cristina Neto G.. Manual Compacto de Matemática: Teoria e Prática. 2.ed. São Paulo: Editora Rideel, 1996.

Giovanni, José Rui; Bonjorno, José Roberto; Giovanni Jr., José Rui, Matemática completa: ensino médio – vol. Único, São Paulo : Editora FTD, 2002.

Lemos, Aluisio Andrade; Higuchi, Fidefico; Fridman, Salomão, Matemática, São Paulo: Editora Moderna, 1976.

Bezerra, Manoel; Jairo, Questões de Matemática, São Paulo: Editora Nacional, 1976.

Sodré, Ulysses; Matemática para o Ensino Fundamental, Médio e Superior; http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/index.html - Out/2007

Telecurso 2000 - Matemática - **http://www.bibvirt.futuro.usp.br/** - **http://www.bibvirt.futuro.usp.br/textos/telecurso_2000**

Telecurso 2000 - Matemática - **http://www.bibvirt.futuro.usp.br/** - **http://www.bibvirt.futuro.usp.br/textos/telecurso_2000**

KlickEducação O Portal da Educação - http://www.klickeducacao.com.br
Exatas - http://www.exatas.mat.br/index.htm

Só Matemática- http://www.somatematica.com.br/

Matemática.com.br - http://matematica.com.br/

http://vestibular.uol.com.br/resumo-das-disciplinas/matematica/

http://educacao.uol.com.br/matematica/ensino_medio.jhtm

http://www.priklady.eu/en/Mathematics/Algebraic-Expressions.alej

http://www.profcardy.com/cardicas/exercicios/semana_02_1.htm

http://blog.educacaoadventista.org.br/tioney/arquivos/lista-fatoracao.pdf

https://brasilescola.uol.com.br/matematica/passo-passo-para-construcao-grafico-funcao-segundo-grau.htm