FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

CERTIFICAÇÃO DE QUALIDADE

Matemática I

Elaborado por

Prof. Gerson Lachtermacher, Ph.D.

Prof. Rodrigo Leone, D.Sc.

Seção 8

Versão 2009-1

Conteúdo da Seção

- Matrizes
  - Operações com matrizes
  - Tipos especiais de matrizes
- Determinantes
  - Co-fator
  - Inversão de matrizes
- Sistema de Equações Lineares
  - Regra de Cramer

Sobre Matrizes

- Matrizes são formas reduzidas e organizadas de se representarem quantidades e dimensões de grandezas, entre outros.
- Uma matriz especial é denominada vetor e serve para representar um ponto no espaço R^n.
- As matrizes são usadas na resolução de sistemas de equações lineares.
- Ajudam a identificar pontos de máximo e mínimo.

Matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

a_{ij} é o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna

Matrizes
Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1{,}5 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

Matrizes

Vetor Coluna e Vetor Linha

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_m \end{bmatrix}_{1 \times m}$$

Matriz Linha e Matriz Coluna

- Matriz Linha ou Vetor Linha
- Matriz Coluna ou Vetor Coluna

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}_{1\times 4}$$

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}_{1\times 2}$$

$$F = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}_{4\times 1}$$

$$G = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

Matrizes

Adição e Subtração

- Só podemos somar ou subtrair matrizes com as mesmas dimensões, isto é, com o mesmo número de colunas e mesmo número de linhas.
- Essa operação é feita da soma ou subtração dos elementos correspondentes das duas matrizes.
- A matriz resultado tem as mesmas dimensões das matrizes originais.

Matrizes
Adição e Subtração - Exemplo Geral

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \boxed{b_{11}} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & \dots & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

$$A \pm B = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \pm b_{11}} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & a_{m3} \pm b_{m3} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrizes

Adição e Subtração - Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3{,}5 \\ 6 & 0 & 1 \\ 2 & \boxed{4} & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 3} + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{3} & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 6{,}5 \\ 11 & 0 & 1 \\ 3 & \boxed{7} & 7 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

Matrizes
Multiplicação por um Escalar

- A multiplicação de uma matriz por um escalar produz uma matriz com mesma dimensão da matriz original.
- A operação é efetuada pela multiplicação do escalar por cada elemento da matriz.

Matrizes - Multiplicação por um Escalar Forma Geral

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$c.A = \begin{bmatrix} \boxed{c.a_{11}} & c.a_{12} & c.a_{13} & \cdots & c.a_{1n} \\ c.a_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & c.a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c.a_{m1} & c.a_{m2} & c.a_{m3} & \cdots & c.a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Matrizes
Multiplicação por um Escalar - Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2{,}5 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

$$B = 6A?$$

$$B = 6A = 6\times \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2{,}5 \\ 4 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} -12 & 6 & 15 \\ 24 & 18 & -6 \\ 12 & 0 & 30 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Matrizes
Produto Interno

- Quando um vetor linha (1 x n) é multiplicado um vetor coluna (n x 1), o resultado é um escalar denominado **Produto Interno.**
- O Produto Interno é a soma dos produtos dos i-ésimos elementos de cada matriz (vetor).
- O Produto Interno deve ser efetuado por matrizes linha e coluna de mesma dimensão.
- A ordem das matrizes na multiplicação é relevante para obtenção do resultado.

- Seja ***A*** um vetor linha com n elementos e ***B*** um vetor coluna com n elementos.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}_{1 \text{ x } n} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n \text{ x } 1}$$

- O Produto Interno W é dado por:

$$W = A \times B = \sum_{i=1}^{n} a_i \times b_i$$

Matrizes
Produto Interno - Exemplo

- Calcule o produto interno dos vetores ***A*** e ***B***:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}_{1\times 2} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}_{2\times 1}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}_{1\times 2} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}_{2\times 1} = (2\times 1) + (4\times 5) = 22$$

Matrizes
Produto de Vetores

- A multiplicação de um vetor coluna $(n \times 1)$ por um vetor linha $(1 \times n)$ resultado em uma **Matriz** $\boldsymbol{(n \times n)}$ na forma abaixo.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}_{1 \times n}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & \dots & a_nb_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & \dots & a_nb_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & \dots & a_nb_n \end{bmatrix}$$

?

Matrizes

Produto de Vetores - Exemplo

- Calcule o produto dos vetores A e B.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}_{1\times 2} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{2\times 1} \quad B\times A = \begin{bmatrix} ? \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$B\times A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{\boxed{2}\times 1} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}_{1\times \boxed{2}} = \begin{bmatrix} 3\times 2 & 3\times 4 \\ 1\times 2 & 1\times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}_{\boxed{2}\times \boxed{2}}$$

Matrizes
Produto de Matrizes

- Nem todas as matrizes podem ser multiplicadas entre si.
- A ordem da multiplicação é importante.
- A segunda dimensão da primeira matriz (nº de colunas) deve ser igual à primeira dimensão da segunda matriz (nº de linhas) para que a multiplicação seja possível.

Matrizes
Produto de Matrizes

- A matriz resultado terá o número de linhas da primeira matriz e o número de colunas da segunda matriz.

- A multiplicação de matrizes pode ser vista como uma série de produtos internos.

Matrizes: Produto de Matrizes
Dimensão do Resultado

$$A_{4 \times 3} \times B_{3 \times 6} = C_{4 \times 6}$$

$$A_{2 \times 4} \times B_{4 \times 2} = C_{2 \times 2}$$

$$A_{5 \times 1} \times B_{1 \times 2} = C_{5 \times 2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \boxed{-4 \quad 2} \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{3x2} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ -1 \end{matrix}} \\ 2 & 3 & \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$\boxed{a_{23} = (-4)(3)+(2)(-1)}$$

Matrizes

Produtos de Matrizes - Forma Geral

- Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times p}$, então $C = A \times B$ é dada por

$$C_{m\times p} = A \times B = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}b_{jp} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{2j}b_{jp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}b_{jp} \end{bmatrix}$$

Matrizes

Produto de Matrizes - Exemplo

- Dadas as matrizes abaixo, calcule B x C

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{3x2} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix}_{2x3} \Rightarrow B_{3x2} \times C_{2x3} = D_{3x3}$$

$$D_{3x3} = \begin{bmatrix} \boxed{(1 \times 1) + (2 \times 3)} & (1 \times -1) + (2 \times 2) & (1 \times 0) + (2 \times -3) \\ (-2 \times 1) + (1 \times 3) & (-2 \times -1) + (1 \times 2) & (-2 \times 0) + (1 \times -3) \\ (0 \times 1) + (2 \times 3) & (0 \times -1) + (2 \times 2) & (0 \times 0) + (2 \times -3) \end{bmatrix}$$

Matrizes
Produto de Matrizes - Exemplo

- Dadas as matrizes abaixo, calcule C x B

$$C = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad -1 \quad 0} \\ 3 \quad 2 \quad -3 \end{bmatrix}_{2x3} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{3x2} \qquad \Rightarrow \quad C_{2x3} \times B_{3x2} = D_{2x2}$$

$$D_{2x2} = \begin{bmatrix} \boxed{(1 \times 1) + (-1 \times -2) + (0 \times 0)} & (1 \times 2) + (-1 \times 1) + (0 \times 2) \\ (3 \times 1) + (2 \times -2) + (-3 \times 0) & (3 \times 2) + (2 \times 1) + (-3 \times 2) \end{bmatrix}_{2 \times 2}$$

Multiplicação de Matrizes Usando Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2		1	2	3	4			1	2	3	4		
3	A=	5	6	7	8		B=	5	6	7	8		
4		4	5	8	12			4	5	8	12		
5		3	5	5	6			3	5	5	6		
6													
7													
8		A(2x2) x B(2x2)		11	14			A(4x4) x B(4x4)		35	49	61	80
9				35	46					87	121	153	200
10										97	138	171	224
11		A(3x3) x B(3x3)		23	29	41				66	91	114	148
12				63	81	113							
13				61	78	111							
14													

1. Posicione na célula D8
2. Inserir a fórmula =MATRIZ.MULT(B2:C3;H2:I3)
3. Marcar as células de D8:E9
4. Pressione F2 e, em seguida, pressione CTRL+SHIFT+ENTER

Matrizes - Representação de Sistema de Equações

- Dados os sistemas de equações abaixo, desenvolva as suas representações matriciais.

a) $$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 10 \\ -3y + 4z &= -20 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x + 2z &= 20 \\ -3y + 4z &= 15 \\ 3x &= -12 \end{aligned}$$

Matrizes - Representação de Sistema de Equações

a) $2x + 3y + z = 10$

$-3y + 4z = -20$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}_{2x3} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3x1} = \begin{bmatrix} 10 \\ -20 \end{bmatrix}_{2x1}$$

Matrizes - Representação de Sistema de Equações

b) $2x + 2z = 20$

$-3y + 4z = 15$

$3x = -12$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \\ -12 \end{bmatrix}_{3\times 1}$$

Matrizes

Produto de Matrizes - Propriedades

- Embora a **seqüência** em que duas matrizes são multiplicadas **afete** o resultado, a **ordem** em que três matrizes são multiplicadas **não afeta** o resultado.

$$A_{m \times n} B_{n \times p} C_{p \times q} = A_{m \times n} (B_{n \times p} C_{p \times q}) = (A_{m \times n} B_{n \times p}) C_{p \times q}$$

Matrizes
Exercícios Propostos

- Dadas as matrizes abaixo, determine *A* x *B* e *B* x *A*.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x2} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}_{2x3}$$

Matrizes
Exercício - Solução A x B

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -12 & 12 \\ -1 & -8 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

- Matriz quadrada, cujos elementos que não pertencem à sua diagonal principal são todos nulos.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrizes

Matriz Identidade

- Matriz diagonal que tem todos os elementos não-nulos iguais a um.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes
Matriz Nula

- Matriz m x n com todos os elementos iguais a zero.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

- A transposta de uma matriz A, m x n é uma matriz n x m denotada por A', ou por A^t, cujas linhas são as colunas de A, e as colunas são as linhas de A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrizes

Matriz Transposta - Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 2{,}5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}_{3x3}$$

$$A' = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2{,}5 & -3 & 6 \end{bmatrix}_{3x3}$$

Matrizes

Matriz Transposta - Exemplos

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}_{3x2}$$

Matriz Simétrica

- Dizemos que uma matriz quadrada é simétrica se esta for igual à sua transposta.
- Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & 7 \\ 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & 7 \\ 8 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

- Como $A = A'$, dizemos que A e A' são simétricas.

Matrizes
Matriz Transposta - Propriedades

$$\left(A_{m\times n} \pm B_{m\times n} \pm C_{m\times n}\right)' = A'_{n\times m} \pm B'_{n\times m} \pm C'_{n\times m}$$

$$\left(A_{m\times n} \times B_{n\times p} \times C_{p\times q}\right)' = C'_{q\times p} \times B'_{p\times n} \times A'_{n\times m}$$

Determinante de uma Matriz

- O determinante é o escalar obtido dos elementos de uma matriz quadrada mediante operações matemáticas especificadas.
- Para uma matriz 2 x 2, temos:

$$\det_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$$

Determinante de uma Matriz

Exemplo

- Para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{3} & \boxed{1} \\ \boxed{-4} & \boxed{2} \end{bmatrix}$$

temos:

$$\det_A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 1 \cdot (-4) = 10$$

Determinantes
Matriz 3x3

- Para uma matriz de 3x3, devemos calcular o determinante da seguinte maneira:

$$\det_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \end{matrix}$$

Determinantes
Matriz 3x3 - Exemplo

- Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -5 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\det_A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -5 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 3\cdot 1\cdot 6 + (-2)\cdot(-1)\cdot 3 + 4\cdot(-5)\cdot 0 \\ -\ 4\cdot 1\cdot 3 - (-2)\cdot(-5)\cdot 6 - 3\cdot(-1)\cdot 0 \end{matrix}$$

$$= 18 + 6 - 0 - 12 - 60 + 0 = -48$$

Determinantes
Matriz 3x3

- Uma regra fácil para calcular o determinante de uma matriz de 3x3:
  1. Duplicação das duas primeiras linhas ou colunas da matriz.
  2. Multiplicação dos elementos das diagonais principais e sua soma.
  3. Multiplicação dos elementos das diagonais secundárias e sua soma.
  4. Subtração dos valores obtidos em 2 e 3.

Determinantes

Matriz 3x3 – Passo 1

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -5 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & -2 & 4 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & -1 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -5 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc} 3 & -2 & 4 \\ -5 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \\ \hline 3 & -2 & 4 \\ -5 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Determinantes

Matriz 3x3 – Passo 2

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & -1 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{ou} \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -5 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 4 \\ -5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(3 \times 1 \times 6) + (-2 \times -1 \times 3) + (4 \times -5 \times 0) = 18 + 6 - 0 = 24$$

Determinantes

Matriz 3x3 – Passo 3

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 3 & -2 \\ -5 & 1 & -1 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad ou \quad \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -5 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 4 \\ -5 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(3 \times 1 \times 4) + (0 \times -1 \times 3) + (6 \times -5 \times -2) = 12 + 0 + 60 = 72$$

Determinantes

Matriz 3x3 – Passo 4

- Subtração dos Valores dos passos 2 e 3

$$\det_A = 24 - 72 = -48$$

Determinantes
Cofator do Elemento de uma Matriz

- Seja M_{ij} a matriz $(n$ - 1) x $(n$ - 1) obtida eliminando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna da matriz $A_{n \text{ x } n}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad M_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Determinantes

Cofator do Elemento de uma Matriz

- O cofator do elemento a_{ij} de uma matriz será dado por

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \left| M_{ij} \right|$$

Determinante da Matriz e Cofatores

- Em termos da linha i

$$|A|_{n\,x\,n} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

para toda linha $i = 1, 2, 3, \ldots, n$

Determinante da Matriz e Cofatores

- Em termos da coluna j

$$|A|_{n\,x\,n} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

para toda coluna $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

Determinantes
Matriz 3x3

$$\det_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \end{matrix}$$

$$\det_A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Determinante da Matriz e Cofatores - Exemplo

- Calcule o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinante da Matriz e Cofatores - Exemplo

$$\det_A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-2) \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & -4 \\ 0 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (-19) + 2 \cdot (20) + 4 \cdot (-34) - 1 \cdot (-104) = -49$$

Determinantes
Propriedades

- O determinante de uma matriz é igual ao da sua transposta: $|A| = |A'|$.
- Se todo elemento de uma linha ou coluna de uma matriz é igual a zero, então o determinante dessa matriz é igual a zero.
- O determinante do produto de duas matrizes é igual ao produto dos determinantes das duas matrizes, isto é, $|AB| = |A||B|$.

Determinante no Excel
Exemplo

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	3	-2	4	1						
2	2	0	5	2						
3	4	3	-4	0		det=	-49	=MATRIZ.DETERM(A1:D4)		
4	0	-5	6	1						

- Calcule o determinante das seguintes matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & -5 \\ 4 & 6 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & x & 3x & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ x & 1 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & 2x & 1 \end{bmatrix}$$

Inversa de uma Matriz

- Se, para uma matriz quadrada $A_{n \times n}$, existir outra matriz quadrada $B_{n \times n}$, tal que

$$A_{n \times n} B_{n \times n} = I_{n \times n} = B_{n \times n} A_{n \times n}$$

então, diz-se que B é a **recíproca** ou a **inversa** de A, denotando-se por

$$B = A^{-1} \quad \text{ou} \quad A = B^{-1}$$

Inversa de uma Matriz 2x2

$$B = A^{-1} \Leftrightarrow AB = I$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} & a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} \\ a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} & a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inversa de uma Matriz
Exemplos

- Calcule a inversa das seguintes matrizes:

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

2. $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Inversa de uma Matriz
Solução

- Pela definição de matriz inversa, devemos ter

$$A \cdot A^{-1} = I$$

- Considere

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Inversa de uma Matriz
Solução

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a + 5c & 2b + 5d \\ a + 3c & b + 3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inversa de uma Matriz
Solução

$$\begin{cases} 2a + 5c = 1 & \text{(I)} \\ 2b + 5d = 0 & \text{(II)} \\ a + 3c = 0 \Rightarrow a = -3c & \text{(III)} \\ b + 3d = 1 \Rightarrow b = 1 - 3d & \text{(IV)} \end{cases}$$

Inversa de uma Matriz
Solução

- Substituindo (III) em (I)

$$2(-3c) + 5c = 1 \Rightarrow -6c + 5c = 1 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow a = 3$$

- Substituindo (IV) em (II)

$$2(1 - 3d) + 5d = 0 \Rightarrow 2 - 6d + 5d = 0 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow b = -5$$

- Logo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Inversa de uma Matriz
Solução

- Pela definição de matriz inversa, devemos ter

$$B \cdot B^{-1} = I$$

- Considere

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Inversa de uma Matriz
Solução

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a - 2c & 2b - 2d \\ 3a + c & 3b + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inversa de uma Matriz
Solução

$$
\begin{cases}
2a - 2c = 1 & & \text{(I)} \\
2b - 2d = 0 & & \text{(II)} \\
3a + c = 0 \Rightarrow & c = -3a & \text{(III)} \\
3b + d = 1 \Rightarrow & d = 1 - 3b & \text{(IV)}
\end{cases}
$$

Inversa de uma Matriz
Solução

- Substituindo (III) em (I)

$$2a - 2(-3a) = 1 \Rightarrow 2a + 6a = 1 \Rightarrow a = 1/8 \Rightarrow c = -3/8$$

- Substituindo (IV) em (II)

$$2b - 2(1 - 3b) = 0 \Rightarrow 2b - 2 + 6b = 0 \Rightarrow b = 1/4 \Rightarrow d = 1/4$$

- Logo

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/8 & 1/4 \\ -3/8 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa
Teorema

- Se uma matriz **A** tem inversa, então: $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})} adj(\mathbf{A})$

$$adj(\mathbf{A}) = C^t = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^t$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \left| M_{ij} \right|$$

$$M_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa Propriedades

- A inversa da inversa é a matriz original: $[A^{-1}]^{-1} = A$
- O determinante da inversa de uma matriz é igual ao recíproco do determinante da matriz original:

$$|A^{-1}| = 1 / |A|$$

- A inversa da transposta de uma matriz é igual à transposta da inversa da matriz.

$$[A']^{-1} = [A^{-1}]'$$

- A inversa do produto de duas matrizes é igual ao produto de suas inversas:

$$[AB]^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

Inversão de Matrizes Usando Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	3	-2	4	1			0,387755	-0,12245	0,020408	-0,14286
2	2	0	5	2			0,408163	0,081633	-0,34694	-0,57143
3	4	3	-4	0			0,693878	-0,06122	-0,4898	-0,57143
4	0	-5	6	1			-2,12245	0,77551	1,204082	1,571429
5										
6		Matriz A						Inversa de A		

1. Posicione na célula G1
2. Inserir a fórmula =MATRIZ.MULT(A1:D4)
3. Marcar as células de G1:J4
4. Pressione F2 e, em seguida, pressione CTRL+SHIFT+ENTER

Sistemas de Equações Lineares

- A resolução de sistemas de equações lineares pela álgebra matricial é chamada de Regra de Cramer.
- Forma algébrica:

$$
\begin{aligned}
3x + 2y \qquad\quad &= 13 \\
-2x + y + 5z &= 1 \\
-3x + 4y - z &= -2
\end{aligned}
$$

Sistemas de Equações Lineares

- Primeiro passo: transformar o sistema da forma algébrica para a forma matricial.
- Forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares
Solução - Regra de Cramer

- Os valores das variáveis são determinados da seguinte forma:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 13 \\ 1 \\ -2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{matrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 13 \\ 1 \\ -2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{matrix} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix}} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} \begin{matrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 13 \\ 1 \\ -2 \end{matrix}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix}}$$

Sistemas de Equações Lineares
Solução - Regra de Cramer

- Como
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -97 \neq 0$$
pode-se resolver o sistema pela Regra de Cramer.
- Calculando-se os determinantes, temos:

$$\begin{vmatrix} 13 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \\ -2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -291 \quad \begin{vmatrix} 3 & 13 & 0 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -194 \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 13 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -97$$

Sistemas de Equações Lineares
Solução - Regra de Cramer

- Logo,

$$x = 3, \quad y = 2 \quad \text{e} \quad z = 1$$

- Se o determinante da matriz dos coeficientes for igual a zero, significa dizer que o sistema não tem solução única e a Regra de Cramer não pode ser usada.

Sistemas de Equações Lineares
Solução - Regra de Cramer

- Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} 3x + y - z = 9 \\ x - y + 2z = -7 \\ x - 2y - z = -5 \end{cases}$$

Sistemas de Equações Lineares
Solução - Regra de Cramer

- Primeiro passo: obter a forma matricial.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares
Solução - Regra de Cramer

- Segundo passo: calcular o determinante da matriz dos coeficientes.

$$\det = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 19$$

- Como o determinante é diferente de zero, podemos resolvê-lo pela Regra de Cramer.

Sistemas de Equações Lineares

Solução - Regra de Cramer

- Terceiro passo:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 1 & -1 \\ -7 & -1 & 2 \\ -5 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 9 & -1 \\ 1 & -7 & 2 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -7 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}}$$

$$x = 1 \qquad y = 4 \qquad z = -2$$

Exercícios Propostos

- Bibliografia Básica
  - Livro-texto 1
    - Exercícios 1-28, páginas 328-340;
    - Exercícios 1-14, páginas 346-360.

Bibliografia

- Básica
  - Livro-texto 1
    - Capítulo 13 – Matrizes e Determinantes, páginas 326-340;
    - Capítulo 14 – Sistemas de Equações Lineares, páginas 341-361.