FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

CERTIFICAÇÃO DE QUALIDADE

Matemática I

Elaborado por

Prof. Gerson Lachtermacher, Ph.D.

Prof. Rodrigo Leone, D.Sc.

Colaboração

Prof. Walter Paulette

Seção 2

Versão 2009-1

ADM 01004 Matemática I

Prof. da Disciplina

Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc.

Conteúdo da Seção

- Números
  - Propriedades
  - Desigualdades
- Potenciação e Radiciação
- Polinômios
  - Produtos Notáveis e Fatoração.
  - Conjuntos Numéricos

Conteúdo da Seção

- Equações Polinomiais do 1º grau
- Inequações
- Valor Absoluto ou Módulo
- Inequações Modulares
- Equações Polinomiais do 2º grau
- Fatoração de Equações do 2º grau

Produtos Notáveis
Exercícios

- Desenvolva os seguintes produtos notáveis:

  a) $(x - 3)^2$ b) $(2x + 5)^2$ c) $(3x - 4y)(3x + 4y)$

Resposta: Sabendo que $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

temos $(x - 3)^2 = x^2 - 2(x)(3) + 3^2 = x^2 - 6x + 9$

$$(2x + 5)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(5) + 5^2 = 4x^2 - 20x + 25$$

$$(3x - 4y)(3x + 4y) = (3x)^2 - (4y)^2 = 9x^2 - 16y^2$$

Produtos Notáveis

Exercícios

- Desenvolva os seguintes produtos notáveis:

$$a)\ \left(\frac{2x}{5} + \frac{3y}{2}\right)^2 \qquad b)\ \left(\frac{x}{2} - \frac{3}{5}\right)^2$$

Resposta:

$$a)\ \left(\frac{2x}{5} + \frac{3y}{2}\right)^2 = \left(\frac{2x}{5}\right)^2 + 2\left(\frac{2x}{5}\right)\left(\frac{3y}{2}\right) + \left(\frac{3y}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{4x^2}{25} + \frac{12xy}{10} + \frac{9y^2}{4}$$

Produtos Notáveis
Exercícios

- Desenvolva os seguintes produtos notáveis:

$$a)\ \left(\frac{2x}{5}+\frac{3y}{2}\right)^2 \qquad \text{b)}\ \left(\frac{x}{2}-\frac{3}{5}\right)^2$$

Resposta:

$$b)\ \left(\frac{x}{2}-\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)^2 =$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{6x}{10} + \frac{9}{25}$$

Produtos Notáveis
Completar o Quadrado

O processo de completar o quadrado tem base na fórmula

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

Considere a equação $x^2 + 2x = 0$

Analisando o termo intermediário, temos:

$$2a = 2 \quad => \quad a = 1$$

Então, devemos somar 1^2 a ambos os lados da equação:

$$x^2 + 2x + 1 = 1$$

Produtos Notáveis
Completar o Quadrado

Daí:

$$(x+1)^2 = 1 \;=>$$

$$x+1 = 1 \quad \text{ou} \quad x+1 = -1 \;=>$$

$$x = 1-1 \quad \text{ou} \quad x = -1-1 \;=>$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -2$$

Produtos Notáveis
Completar o Quadrado

Considere a equação: $x^2 - 6x + 5 = 0$

Então,

$$x^2 - 6x = -5$$

$$x^2 - 6x + 9 = -5 + 9$$

$$(x - 3)^2 = 4$$

$$x - 3 = -2 \quad ou$$

$$x - 3 = 2$$

$$x = 3 - 2 \quad ou$$

$$x = 3 + 2$$

$$x = 1 \quad ou$$

$$x = 5$$

Produtos Notáveis
Completar o Quadrado

Exercícios: Completando os quadrados resolva as seguintes equações:

1) $x^2 - 5x + 6 = 0$

2) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

3) $3x^2 - 4x + 1 = 0$

Produtos Notáveis
Completar o Quadrado

Considere o trinômio: $y = 2x^2 + 6x - 3$

Colocando 2 em evidência, temos:

$$y = 2\left(x^2 + 2x\right) - 3$$

Analisando o termo intermediário, percebemos que devemos somar 2 em ambos os lados da equação.

$$y + 2 = 2\left(x^2 + 2x\right) + 2 - 3$$

$$y + 2 = 2\left(x^2 + 2x + 1\right) - 3$$

$$y + 5 = 2\left(x + 1\right)^2$$

Produtos Notáveis
Exercícios

- Desenvolva os seguintes produtos notáveis:

$$a)\ (x+4)^2$$

$$b)\ (x-3)(x+3)$$

$$c)\ (x-2)^3$$

$$d)\ (x+4)^3$$

$$e)\ (2x-\frac{3}{2})^2$$

Produtos Notáveis
Soluções dos Exercícios

$$a)\ (x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$$

$$b)\ (x-3)(x+3) = x^2 - 9$$

$$c)\ (x-2)^3 = (x-2)(x-2)^2 =$$

$$(x-2)(x^2-4x+4) =$$

$$= x^3 + 3(-2)x^2 + 3(-2)^2x + (-2)^3$$

$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$d)\ (x+4)^3 =$$

$$= (x+4)(x+4)^2$$

$$= (x+4)(x^2+8x+16)$$

$$= x^3 + 3(4)x^2 + 3(4)^2 x + (4)^3$$

$$= x^3 + 12x^2 + 48x + 64$$

$$e)\ \left(2x - \tfrac{3}{2}\right)^2 =$$

$$= (2x)^2 + 2(2x)(-\frac{3}{2}) + (-\frac{3}{2})^2$$

$$= 4x^2 - 6x + \frac{9}{4}$$

Triângulo de Pascal

Considere os seguintes números:

$$0! = 1$$

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times n$$

Então

$$0! = 1$$

$$2! = 1 \times 2 = 2$$

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

Triângulo de Pascal

Considere o seguinte número:

$$C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Então

$$C_0^0 = \frac{0!}{0! \times 0!} = \frac{1}{1 \times 1} = 1 \qquad C_0^1 = \frac{1!}{0! \times 1!} = \frac{1}{1 \times 1} = 1$$

$$C_1^1 = \frac{1!}{1! \times 0!} = \frac{1}{1 \times 1} = 1 \qquad C_0^2 = \frac{2!}{0! \times 2!} = \frac{2}{1 \times 2} = 1$$

$$C_1^2 = \frac{2!}{1! \times 1!} = \frac{2}{1 \times 1} = 2 \qquad C_2^2 = \frac{2!}{2! \times 0!} = \frac{2}{2 \times 1} = 1$$

Triângulo de Pascal

$$C_0^3 = \frac{3!}{0!\times 3!} = \frac{6}{1\times 6} = 1$$

$$C_1^3 = \frac{3!}{1!\times 2!} = \frac{6}{1\times 2} = 3$$

$$C_2^3 = \frac{3!}{2!\times 1!} = \frac{6}{2\times 1} = 3$$

$$C_3^3 = \frac{3!}{3!\times 0!} = \frac{6}{6\times 1} = 1$$

$$C_1^4 = \frac{4!}{1!\times 3!} = \frac{24}{1\times 6} = 4$$

$$C_2^5 = \frac{5!}{2!\times 3!} = \frac{120}{2\times 6} = 10$$

Triângulo de Pascal

- Considere o seguinte triângulo de números dispostos da seguinte forma:

$$
\begin{array}{llllll}
C_0^0 & & & & & \\
C_0^1 & C_1^1 & & & & \\
C_0^2 & C_1^2 & C_2^2 & & & \\
C_0^3 & C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 & & \\
C_0^4 & C_1^4 & C_2^4 & C_3^4 & C_4^4 & \\
C_0^5 & C_1^5 & C_2^5 & C_3^5 & C_4^5 & C_5^5 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

$$onde \quad C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Triângulo de Pascal

- Em valores o triângulo de Pascal pode se escrito como:

$$
\begin{array}{llllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
\qquad \textit{onde} \quad C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}
$$

Triângulo de Pascal

- Estes valores do triângulo de Pascal podem ser obtidos facilmente:

$$
\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
\boxed{1} + & \boxed{1} = & & & & \\
1 & \boxed{2} & 1 & & & \\
\boxed{1} + & \boxed{3} = & \boxed{3} + & \boxed{1} = & & \\
1 & \boxed{4} & 6 & \boxed{4} & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}
$$

Triângulo de Pascal e Produtos Notáveis

Podemos expandir um produto notável utilizando as linhas do triângulo de Pascal como os coeficientes do polinômio. Exemplo:

$$a)\ (x+4)^2 = 1x^2 \times 4^0 + 2x^1 \times 4^1 + 1x^0 \times 4^2$$

$$= x^2 + 8x + 16$$

$$b)\ (x-2)^3 = 1x^3 \times (-2)^0 + 3x^2 \times (-2)^1 + 3x^1 \times (-2)^2 + 1x^0 \times (-2)^3$$

$$= x^3 - 6x^2 + 6x - 8$$

Triângulo de Pascal e Produtos Notáveis

$$c)\ (x+a)^2 = 1x^2a^0 + 2x^1a^1 + 1x^0a^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$d)\ (x+a)^3 = 1x^3a^0 + 3x^2a^1 + 3x^1a^2 + 1x^0a^3$$

$$= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

$$e)\ (x-a)^4 = 1x^4a^0 - 4x^3a^1 + 6x^2a^2 - 4x^1a^3 + 1x^0a^4$$

$$= x^4 - 4ax^3 + 6x^2a^2 - 4a^3x + a^4$$

$$e)\ (x-a)^5 = 1x^5a^0 - 5x^5a^1 + 10x^5a^2 - 10x^2a^3 + 5x^1a^4 - 1x^0a^5$$

$$= x^5 - 5ax^4 + 10a^2x^3 - 10a^3x^2 + 5a^4x - a^5$$

Equação do Primeiro Grau

- Toda equação que pode ser escrita na forma $mx + b = 0$, onde $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{b} \in$ R, $\boldsymbol{m \neq 0}$ e $\boldsymbol{x}$ é uma variável, é denominada uma equação do primeiro grau.

$$mx + b \quad \Leftrightarrow \quad mx = -b \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{m}$$

- O valor $x = -\dfrac{b}{m}$ é chamado de raiz da equação do primeiro grau.

Equação do Primeiro Grau
Exercícios

- Ache as raízes das seguintes equações:

1) $$\frac{3}{2}x - \sqrt{8} = 4$$

2) $$\frac{6}{\sqrt{2}}x + 2 = \sqrt[3]{8}$$

3) $$\left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^3 x = 0$$

Equação do Primeiro Grau
Soluções

2. $$\frac{3}{2}x - \sqrt{8} = 4 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = 4 + \sqrt{8}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{2}{3}\left(4 + \sqrt{8}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{8}{3} + \frac{2\sqrt{8}}{3}$$

Equações do Primeiro Grau
Soluções

2. $\dfrac{6}{\sqrt{2}}x + 2 = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow \dfrac{6}{\sqrt{2}}x = 2 - 2 \Leftrightarrow x = 0$

3. $\left(\dfrac{6}{\sqrt{2}}\right)^3 x = 0 \Leftrightarrow x = 0$