

Matemática II

E-mails:

damasceno12@hotmail.com

damasceno12@uol.com.br

damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info

damasceno.info

Matemática II - Integração

Derivadas

Função

Derivada

$$f(x)$$

$$f'(x)$$

$$x$$

$$1$$

$$x^2$$

$$2x$$

$$x^3$$

$$3x^2$$

$$x^4$$

$$4x^3$$

$$x^5$$

$$5x^4$$

Matemática II - Integração

Derivadas

Função

$$x^n$$

$$\text{sen } x$$

$$\text{cos } x$$

$$e^x$$

$$\ln x$$

$$a^x$$

Derivada

$$nx^{n-1}$$

$$\text{cos } x$$

$$-\text{sen } x$$

$$e^x$$

$$1/x$$

$$a^x \ln a$$

Primitivas

Dizemos que $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$

$$\text{se } F'(x) = f(x)$$

Exemplos:

(1) $F(x) = x^2$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$

(2) $F(x) = x^2 + 1$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$

(3) $F(x) = x^2 + 100$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$

Exemplos:

(4) $F(x) = x^2 - 1000$ é uma
primitiva de $f(x) = 2x$

(5) $F(x) = x^2 + 2x + 1$ é uma
primitiva de $f(x) = 2x + 2$

(6) $F(x) = x^2 + 2x - 1$ é uma
primitiva de $f(x) = 2x + 2$

Matemática II - Integração

Função

Primitiva

$$f(x)$$

$$F(x)$$

$$1$$

$$x + c$$

$$2x$$

$$x^2 + c$$

$$3x^2$$

$$x^3 + c$$

$$4x^3$$

$$x^4 + c$$

$$5x^4$$

$$x^5 + c$$

Matemática II - Integração

Função $f(x)$	Primitiva $F(x)$
nx^n	$x^{n+1} + c$
$\cos x$	$\text{sen } x + c$
$-\text{sen } x$	$\cos x + c$
e^x	$e^x + c$
$1/x$	$\ln x$
$a^x \ln a$	a^x

Integrais Indefinidas

A integral indefinida de f em relação a x é o conjunto de todas as primitivas de f .

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \text{onde} \quad F'(x) = f(x)$$

Matemática II - Integração

Função	Primitiva	Integral indefinida
$f(x)$	$F(x)$	$\int f(x)dx$
1	$x + c$	$x + c$
$2x$	$x^2 + c$	$x^2 + c$
$3x^2$	$x^3 + c$	$x^3 + c$
$4x^3$	$x^4 + c$	$x^4 + c$
$5x^4$	$x^5 + c$	$x^5 + c$

Matemática II - Integração

$f(x)$	$F(x)$	$\int f(x)dx$
nx^n	$x^{n+1} + c$	$x^{n+1} + c$
$\cos x$	$\text{sen } x + c$	$\text{sen } x + c$
$-\text{sen } x$	$\cos x + c$	$\cos x + c$
e^x	$e^x + c$	$e^x + c$
$1/x$	$\ln x + c$	$\ln x + c$
$a^x \ln a$	$a^x + c$	$a^x + c$
$\sec^2 x$	$\text{tg } x + c$	$\text{tg } x + c$

Matemática II - Integração

Se $y = F(x)$ é uma função cuja derivada é conhecida,

digamos, $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$, podemos dizer que

$$F(x) = \int f(x)dx + C$$

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = \int f(x)dx + C$$

(são igualdades equivalentes)

Matemática II - Integração

Exemplos:

$$(1) \quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1} \int (n+1)x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

$$(2) \quad \int \text{sen } x \, dx = - \int - \text{sen } x \, dx = \\ - \text{cos } x + C$$

$$(3) \quad \int \text{cos } x \, dx = \text{sen } x + C$$

$$(4) \quad \int e^x \, dx = e^x + C$$

Matemática II - Integração

Exemplos:

$$(5) \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$(6) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$$

Integrais imediatas

$$(1) \quad \int dx = \int 1 dx = x + C$$

$$(2) \quad \int 2x dx = x^2 + C$$

$$(3) \quad \int 3x^2 dx = x^3 + C$$

$$(4) \quad \int 4x^3 dx = x^4 + C$$

Integrais imediatas

$$(5) \quad \int nx^{n-1} dx = x^n + C$$

$$(6) \quad \int x dx = \frac{1}{2} \int 2x dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$(7) \quad \int x^2 dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

Integrais imediatas

$$(8) \quad \int x^3 dx = \frac{1}{4} \int 4x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$(9) \quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1} \int (n+1)x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$(10) \quad \int \cos x dx = \text{sen } x + C$$

Integrais imediatas

$$(11) \int \operatorname{sen} x \, dx = - \int - \operatorname{sen} x \, dx = - \cos x + C$$

$$(12) \int e^x \, dx = e^x + C$$

$$(13) \int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} \int \ln a \, a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$(14) \int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$$

Propriedades da integral indefinida

$$(1) \quad \int f(x) + g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$(2) \quad \int f(x) - g(x)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

$$(3) \quad \int kf(x)dx = k \int f(x)dx$$

$$(4) \quad \int mf(x) + ng(x)dx = m \int f(x)dx + n \int g(x)dx$$

Integração termo a termo

$$(1) \quad \int x^2 - 2x + 5 \, dx =$$

$$\int x^2 \, dx - \int 2x \, dx + \int 5 \, dx =$$

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

Integração termo a termo

$$(2) \int x^{-4} - 2x + 5 \, dx =$$

$$\int x^{-4} \, dx - \int 2x \, dx + \int 5 \, dx =$$

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

Integração termo a termo

$$(3) \int x^{2/3} - 2 \cos x + 5 \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$\int x^{2/3} \, dx - 2 \int \cos x \, dx + 5 \int \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$\frac{x^{5/3}}{5/3} - 2 \operatorname{sen} x - 5 \cos x + C$$

Integração termo a termo

$$(4) \quad \int \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$

$$\int \sqrt{x} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$

$$\int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C$$

Integração termo a termo

$$(5) \quad \int x^{-2/3} - \frac{2}{3}x^{-2/3} + \frac{5}{4}x^{-4/3} \, dx$$

$$(6) \quad \int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \, dx$$

Integração termo a termo

(7) Resolver o problema de valor inicial

$$s'(t) = \operatorname{sen} t + \operatorname{cost}, \quad s(\pi) = 1$$

$$s(t) = \int \operatorname{sen} t \, dt + \int \operatorname{cost} \, dt + C$$

$$s(t) = -\operatorname{cost} + \operatorname{sen} t + C$$

Como $s(\pi) = 1$ temos

Integração termo a termo

$$s(\pi) = -\cos\pi + \operatorname{sen}\pi + C$$

$$1 = 1 + 0 + C \Rightarrow$$

$$C = 0$$

Portanto,

$$s(t) = -\cos t + \operatorname{sen} t$$