Matemática II

Prof. Luiz Gonzaga

Damasceno

www.damasceno.info

Matemática II

E-mails:

damasceno12@hotmail.com
damasceno12@uol.com.br
damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info
damasceno.info

A semeadura é livre, mas a colheita é obrigatória.

Nossas ações ecoam no universo que, por ser retributivo, devolverá à sua fonte de ação os efeitos correspondentes - bênçãos ou sofrimentos.

A cada um segundo suas obras, ensinou Jesus.

3 – Derivadas. Regra da cadeia

***Regra da cadeia**: Se f e g são funções diferenciáveis, então a derivada da função composta*

$$f(x) = g(h(x))$$

é dada pela fórmula

$$f'(x) = g'(h(x)) \times h'(x)$$

3 - Derivadas. Regra da cadeia

Se $z = f(y)$ *e* $y = h(x)$*, então:*

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dx}$$

Exercícios: 3) – Calcular a derivada das seguintes funções:

(1) $f(x) = (x+3)^4$

(2) $f(x) = 3.e^{2x+1}$

3 - Derivadas. Regra da cadeia

(3) $f(x) = 2x^3 + 4x^{-3}$

(4) $f(x) = 3(2x+2)^{\frac{1}{2}} - 5x^{-3}$

(5) $f(x) = (3(2x+2)^{\frac{1}{2}})(5x^{-3})$

(6) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^3 + 3x}{4x^2}}$

4 - Derivadas. Derivação implícita.

Considere a função y = f(x) definida por $x = y^2$.

Então,

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(y^2) \Rightarrow 1 = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{d}{dx}(y)$$

$$\Rightarrow 1 = 2yy'$$

4 - Derivadas. Derivação implícita.

Uma função explícita de y em x expressa explicitamente y em termos de x e pode diferenciada (ou derivada) de acordo com as regras estudadas até agora.

Uma função implícita (algumas equações do tipo $f(x,y) = 0$) não podem explicitar y em relação a x.

Exemplo: $x^2 y - x + y^2 = 0$

4 - Derivadas. Derivação implícita.

$$x^2 y - x + y^2 = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^2)y + x^2\frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^2)y + x^2\frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2xy + x^2 y' - 1 + 2yy' = 0$$

4 - Derivadas. Derivação implícita.

$$2xy + x^2y' - 1 + 2yy' = 0$$

$$(x^2 + 2y)y' = 1 - 2xy$$

$$y' = \frac{1 - 2xy}{(x^2 + 2y)}$$

4 - Derivadas. Derivação implícita.

Exercícios: 4) Calcular as derivadas das seguintes funções definidas implicitamente:

(1) $x^2 + xy - 2x = 1$

(2) $x^2 y + 3xy^3 - x = 3$

(3) $y + seny = x$

(4) $x \cos y = y$

(5) $x^2 + y^2 = 1$

(6) $x^2 \cos y + y^2 senx = 1$

Matemática II - **2. Derivadas**

" Para cultivar a sabedoria, é preciso força interior. Sem crescimento interno, é difícil conquistar a autoconfiança e a coragem necessárias. Sem elas, nossa vida se complica. O impossível torna-se possível com a força de vontade." (Dalai Lama).

5 - Diferencial de x e y

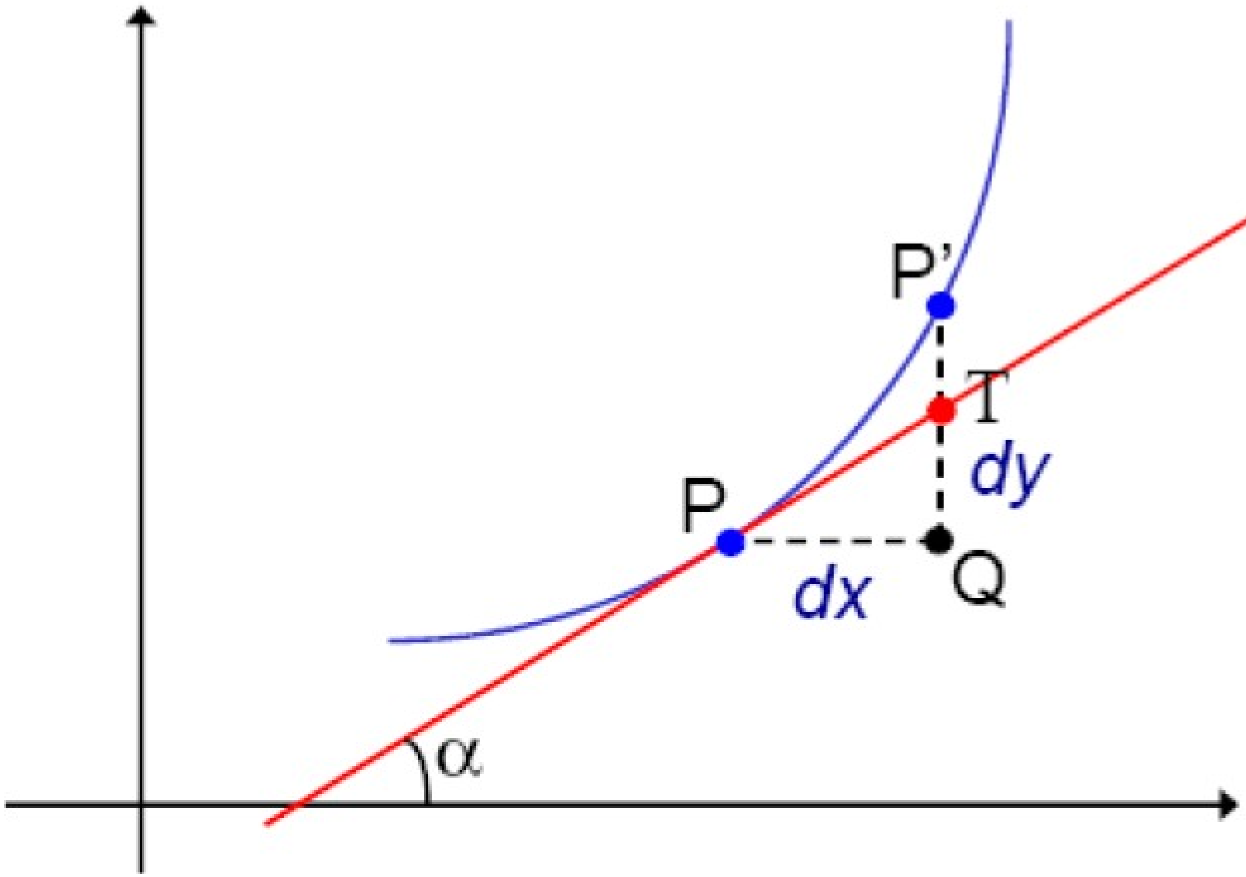
Até agora, $\dfrac{dy}{dx}$ foi considerado como $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Em alguns casos é interessante interpretar

dy e dx separadamente. Dessa forma, definimos:

Diferencial de x : dx

Diferencial de y : $dy = \dfrac{dy}{dx} dx = f'(x)dx$



$\Delta y = QP'$

$dy = QT$

$dx = \Delta x$

Exemplos:

1) Se $y = x^2$ então $dy = f'(x)dx = 2xdx$

2) Se $y = 5x^4$ então $dy = f'(x)dx = 20x^3dx$

3) $d(\frac{1}{x}) = (-\frac{1}{x^2})dx = \frac{-dx}{x^2}$

Exemplos:

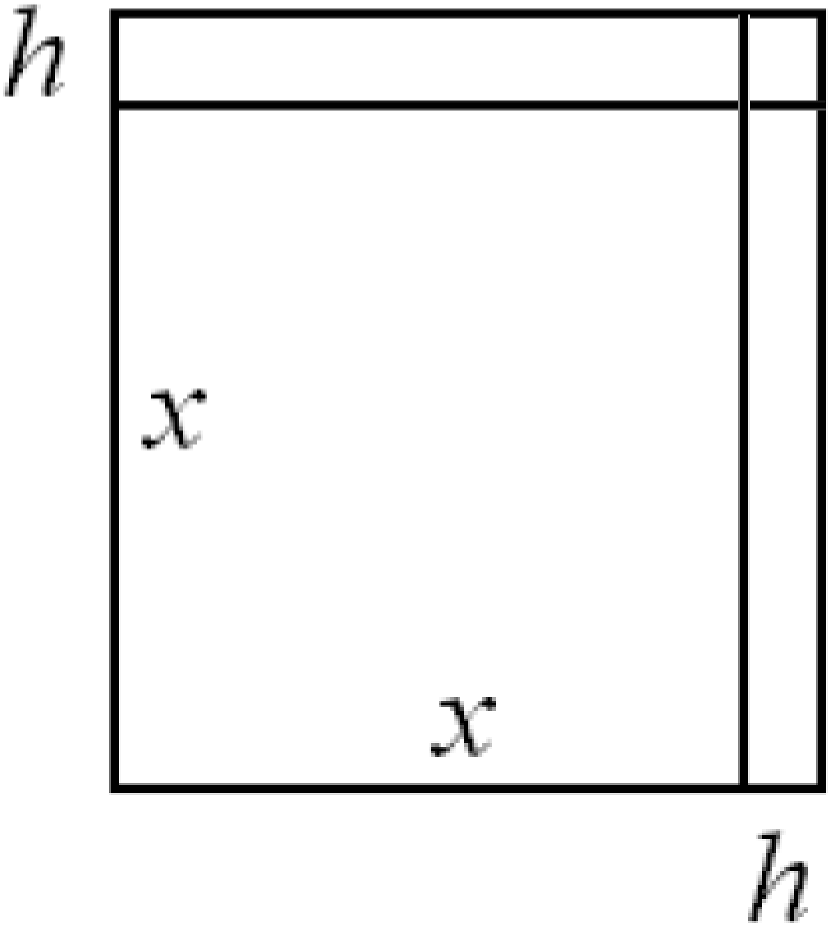
4) $d(uv) = [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]dx$

$$d(uv) = u'(x)v(x)dx + u(x)v'(x)dx$$

$$d(uv) = vdu + udv$$

5) Para ver como essa idéia funciona num caso simples, seja x o lado de um quadrado e $y = x^2$ a sua área. Se cada lado aumenta de uma quantidade pequena h, então o incremento da área é

$$dy = f'(x)dx = 2xdx = 2xh$$


h
x
x
h

6) Utilize o conceito de diferencial para calcular o valor de $\sqrt[3]{1010}$. Sabe-se que $\sqrt[3]{1000} = 10$.

$$y = \sqrt[3]{x}$$

$$dy = f'(x)dx = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx$$

$$dx = 10 \quad \Rightarrow \quad dy = 0{,}033$$

$$\sqrt[3]{1010} = \sqrt[3]{1000} + 0{,}033 = 10 + 0{,}033 = 10{,}033$$

6 - Derivadas sucessivas

A derivada da primeira derivada é a segunda derivada. A derivada da segunda derivada é a terceira derivada, e assim por diante.

$$f'(x) \quad é \quad chamada \quad de \quad primeira \quad derivada$$

$$f''(x) \quad é \quad chamada \quad de \quad segunda \quad derivada$$

$$f'''(x) \quad é \quad chamada \quad de \quad terceira \quad derivada$$

$$f^{4}(x) \quad é \quad chamada \quad de \quad quarta \quad derivada$$

$$f^{n}(x) \quad é \quad chamada \quad de \quad n - ésima \quad derivada$$

Notações da derivada de ordem *n*:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^n(x) = y^{(n)} = D_x{}^n y$$

Ex. Calcular as derivadas de ordem superior de

$$f(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 10$$

$$f'(x) = 7x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$f''(x) = 42x^5 + 30x^4 + 20x^3 + 12x^2 + 6x + 10$$

$$f'''(x) = 210x^4 + 120x^3 + 60x^2 + 24x + 6$$

$$f'''(x) = 840x^3 + 360x^2 + 120x + 24$$

$$f^4(x) = 2520x^2 + 720x + 120$$

$$f^5(x) = 5040x + 720$$

$$f^6(x) = 5040$$

$$f^7(x) = 0$$

Ex. Calcular as derivadas de ordem superior de

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{4}(x) = \operatorname{sen} x$$

$$f^{5}(x) = \cos x$$

$$f^{6}(x) = -\operatorname{sen} x$$

$$f^{7}(x) = -\cos x$$

$$f^{8}(x) = \operatorname{sen} x$$

Matemática II - **2. Derivadas**

Tua natureza divina não foi feita para ser aprisionada à sombra do sofrimento, fora do alcance de Deus, e sim para expandir, crescer, para assim, reencontrar sua real função.

És a flecha que tem por destino ser arremessada ao tronco do conhecimento e, se forças em direção contrária, cais em depressão, por negares ao teu ser a tua real necessidade que é a de estares livre, presente na tua realidade divina. Deves saber que as coisas não precisam acontecer nesta ordem. (Dalai Lama).

7 - Aplicações do estudo de derivadas.

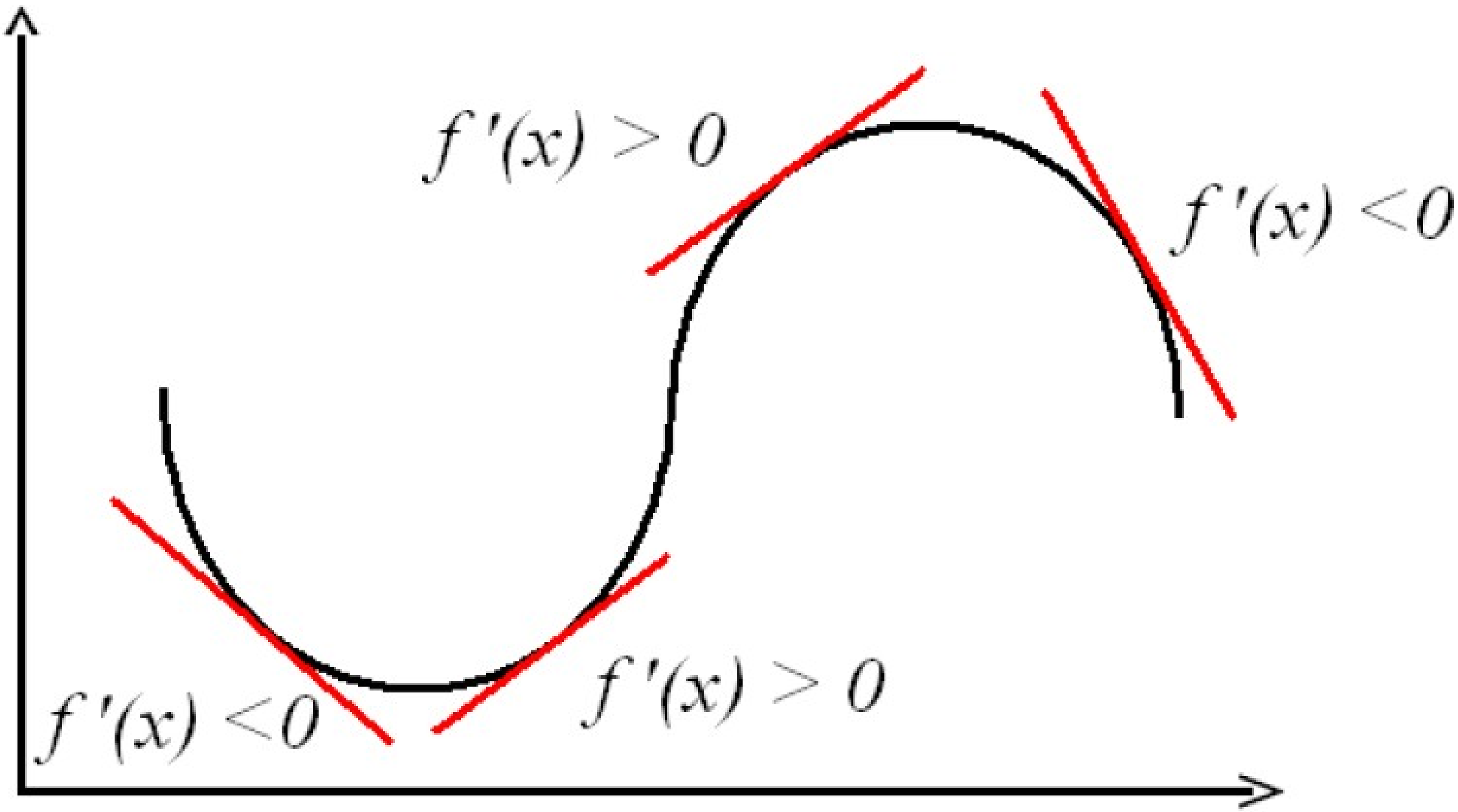
Máximos e Mínimos.

Pontos de inflexão.

A função f é dita crescente no ponto x se $f'(x) > 0$.

A função f é dita decrescente no ponto x se $f'(x) < 0$.

Matemática II - 2. Derivadas



Exemplo: Ache o intervalo em que a função $y = 3x^2 + 7$ é crescente e o intervalo em que ela é decrescente.

$$f'(x) = 6x$$

$$f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad 6x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0$$

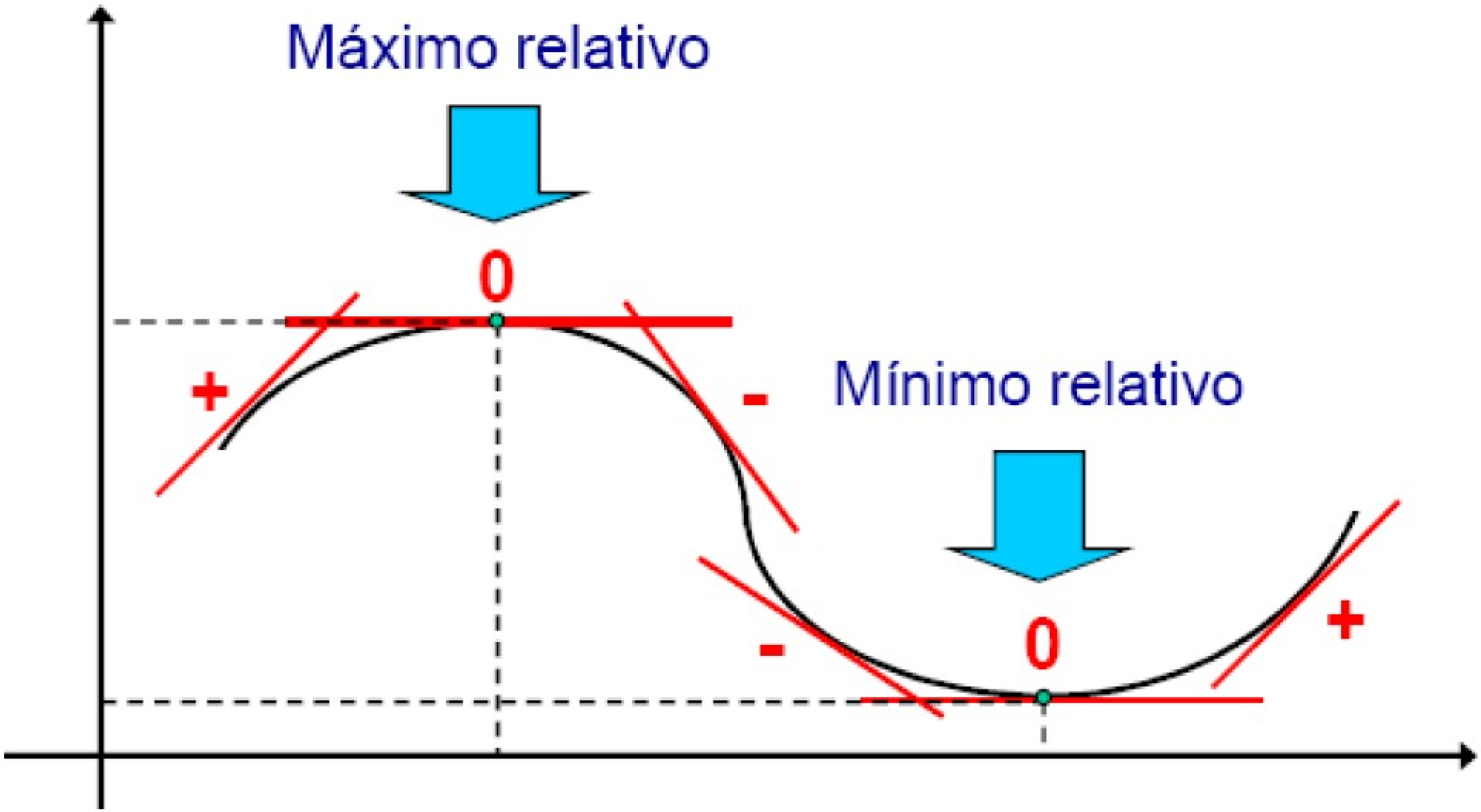
$$f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad 6x < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0$$

Portanto, a função $y = 3x^2 + 7$ é crescente para $x > 0$ e é decrescente para $x < 0$.

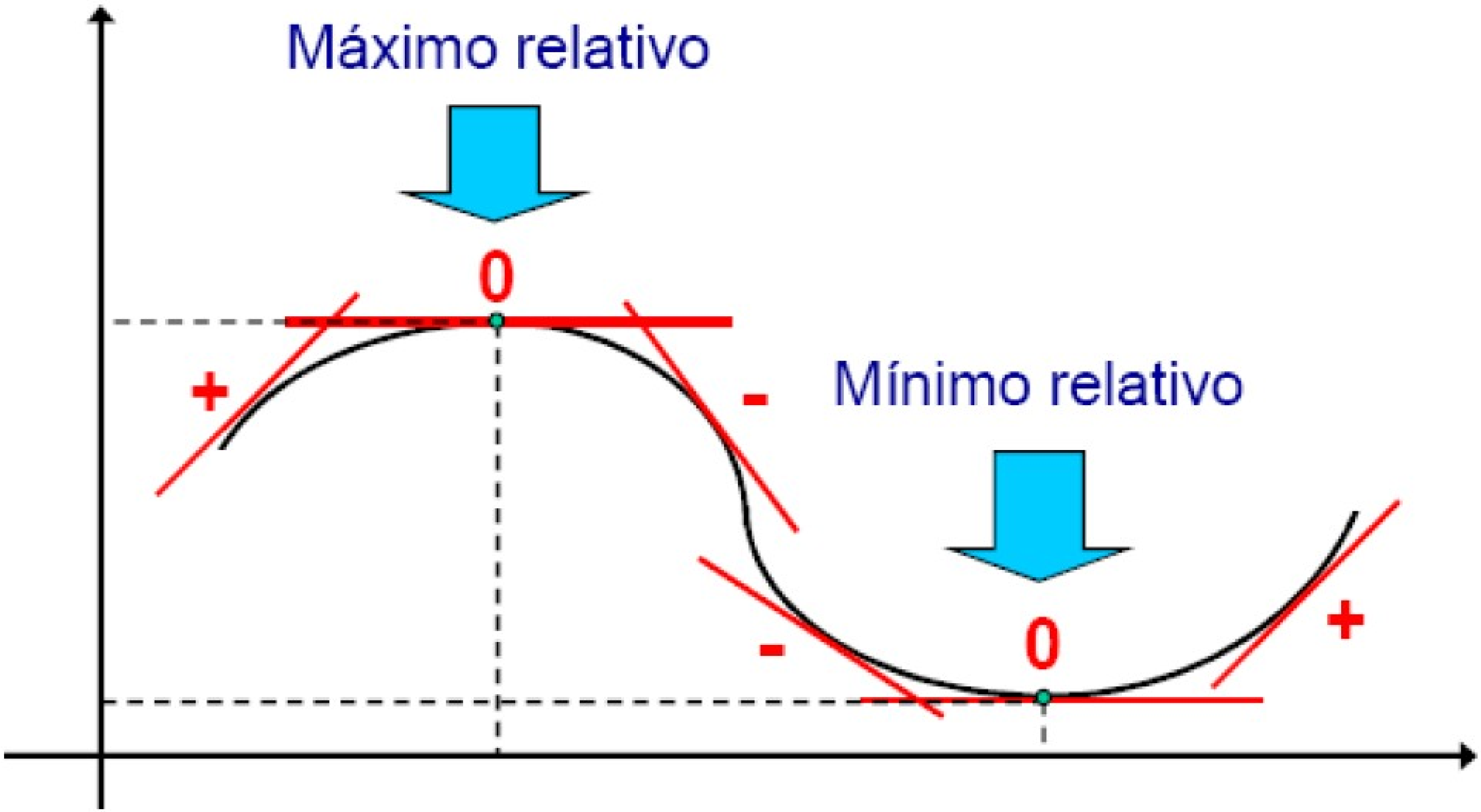
7.1 - Pontos de máximo e de mínimo

Dizemos que c é ponto de máximo relativo (ou local) da função f, se $f(c) \geq f(x)$ para todo x pertencente a uma vizinhança de c. Nesse caso, dizemos que $f(c)$ é o máximo relativo (ou local) da função f no ponto c.

Matemática II - 2. Derivadas



Dizemos que c é ponto de mínimo relativo (ou local) da função f, se $f(c) \leq f(x)$ para todo x pertencente a uma vizinhança de c. Nesse caso, dizemos que $f(c)$ é o máximo relativo (ou local) da função f no ponto c.


Máximo relativo
0
+
-
Mínimo relativo
-
0
+

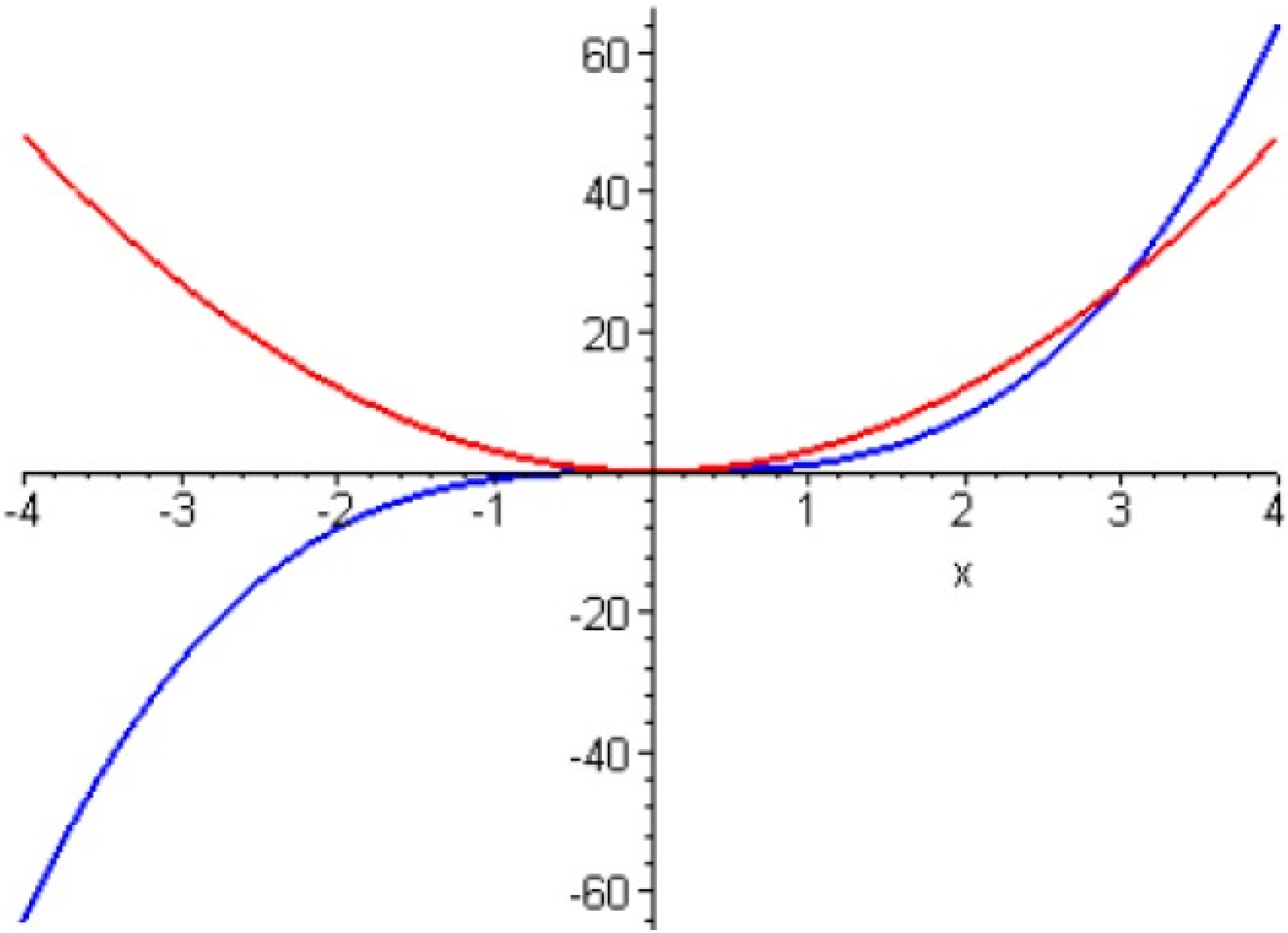
Matemática II - 2. Derivadas

Observações:

1. Se $f(x)$ possui um máximo ou um mínimo relativo em $x = c$, então $f'(c)=0$

2. $f'(c)=0$ não implica na existência de um ou de um mínimo relativo em $x = c$, mesmo que $f(x)$ e $f\,'(x)$ sejam contínuas em c.

Matemática II - 2. Derivadas



Matemática II - **2. Derivadas**

Tens a opção em escolher novamente, sempre que sentires a ausência do teu coração em tuas decisões, ou seja, a ausência da paz de espírito.
Volta, recolhe teu ser no silêncio que habita tua morada, e lá, começa por ti.
O que queres que não podes ter?
Nesta frase tão curta, reside todo o emaranhado de fios que te sufocam a cada dia.
Começa por ti e em ti. (Dalai Lama).

Matemática II - **2. Derivadas**

Aprende a conhecer tuas reais necessidades e começa por elas.
Uma a uma, purificando teu ser do sofrimento que tens te causado por todo este tempo.
Desacredita da tua má sorte e põe tua atenção, teu coração no conhecimento que está dentro de ti, em silêncio, a esperar-te para dar-te a paz,
a certeza de quem és. (Dalai Lama).