

Integrais definidas

Considere uma função contínua arbitrária $f(x)$ definida em um intervalo fechado $[a, b]$.

Comece dividindo o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos escolhendo $n-1$ pontos, digamos x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , entre a e b , sujeitos apenas a condição

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$$

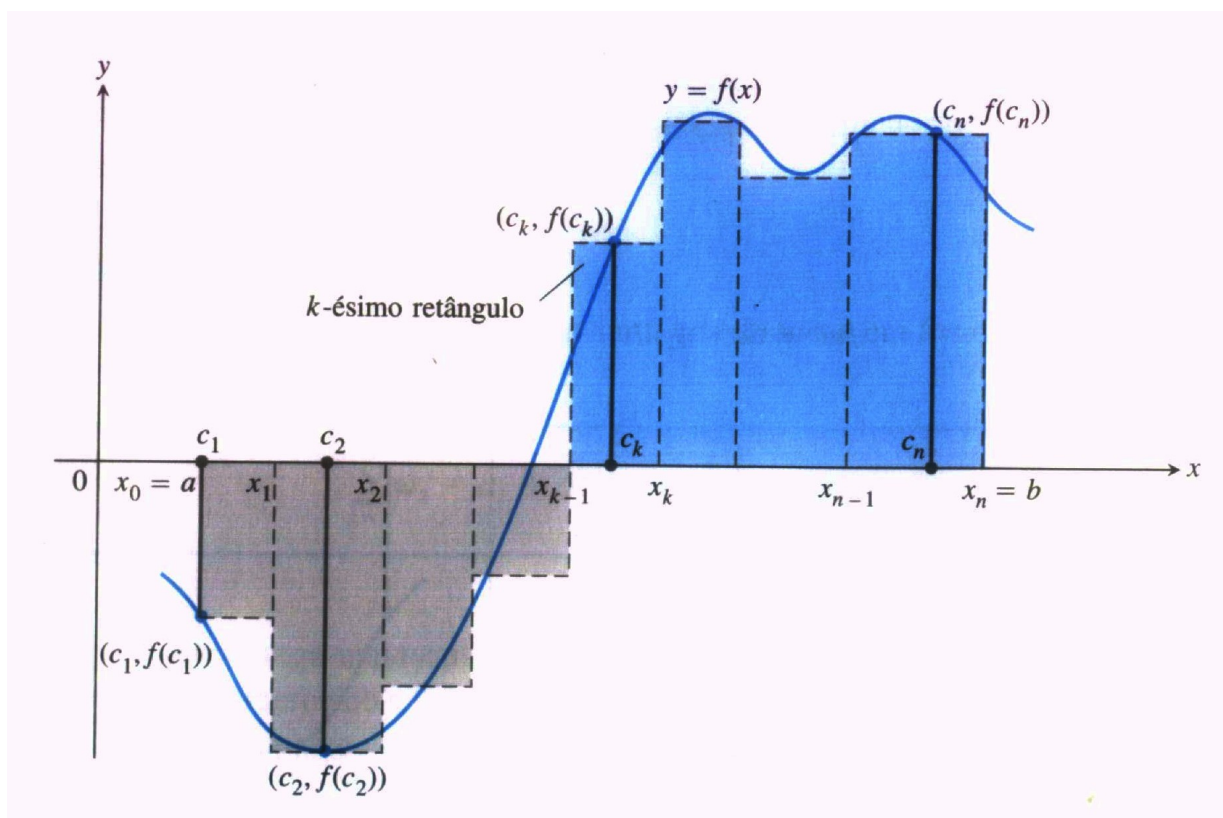
Para tornar a notação coerente, denote a por x_0 e b por x_n .

O conjunto

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\} \quad \text{é chamado de partição de } [a, b].$$

Seja $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

Selecione em cada subintervalo um número c_k . Considere em cada subintervalo um retângulo com uma base no eixo x de valor Δx_k e que toca a curva $y = f(x)$ em $(c_k, f(c_k))$. Veja gráfico abaixo.



Os retângulos permitem fazer uma aproximação para o cálculo da região que fica entre o gráfico da função $y = f(x)$ e o eixo x .

Em cada subintervalo, formamos o produto $f(c_k) \cdot \Delta x_k$, que pode ser positivo, negativo ou nulo.

Por fim, tomamos a soma desses produtos:

$$s_n = f(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + f(c_3) \cdot \Delta x_3 + \dots + f(c_n) \cdot \Delta x_n \quad \Leftrightarrow$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k$$

Esta soma, é chamada de soma de Riemann para $f(x)$ no intervalo $[a, b]$

O limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k$$

se existir, é chamado de integral definida de f em $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(c_k) \cdot \Delta x_k$$

Propriedades das Integrais definidas

$$(1) \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$(2) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$(3) \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$(4) \int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$(5) \int_a^b f(x) - g(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

$$(6) \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

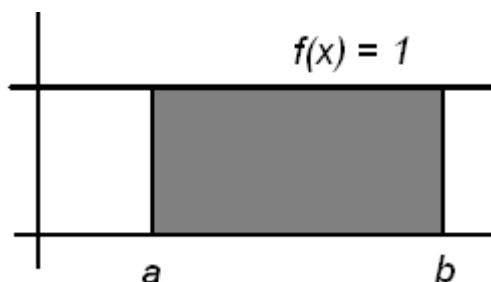
Exemplo: Suponha que $\int_{-1}^1 f(x) dx = 5$, $\int_1^4 f(x) dx = -2$ e $\int_{-1}^1 h(x) dx = 7$.

Encontre (1) $\int_4^1 f(x) dx$

(2) $\int_{-1}^1 [2f(x) + 3h(x)] dx$

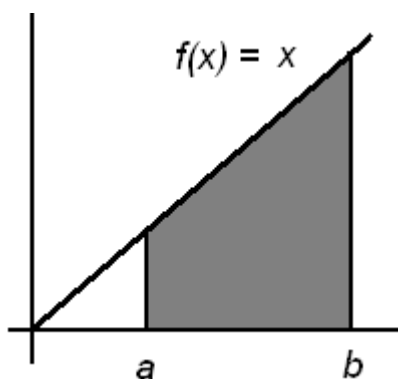
$$(3) \int_{-1}^4 f(x) dx$$

Exemplos: 1) **Se $f(x) = 1$ então uma primitiva de $f(x)$ é $F(x) = x$, logo**



$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \times 1 = b - a = F(b) - F(a)$$

2) **Se $f(x) = x$ então uma primitiva de $f(x)$ é $F(x) = x^2/2$, logo**



$$\int_a^b x dx = \frac{bf(b)}{2} - \frac{af(a)}{2} = \frac{bb}{2} - \frac{aa}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = F(b) - F(a)$$

Exercícios: 1) $\int_4^1 (1 - x) dx$

2) $\int_0^1 (1 - x) dx$

3) $\int_0^1 (1 + x^2) dx$

4) $\int_1^{-1} (1 + x^2) dx$

5) $\int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx$

6) $\int_{-2}^2 (x^3 - x^2 - 2x) dx$

Teorema do valor médio para integrais definidas

Se f for contínua em $[a, b]$, então em algum ponto c de $[a, b]$,

$$f(c) \cdot (b - a) = \int_a^b f(x) dx$$

Exemplo: Determine o valor médio de $f(x) = 4 - x$ em $[0, 3]$ e em que ponto do domínio dado realmente assume este valor.

$$f(c) \cdot (b - a) = \int_a^b f(x) dx \quad \Leftrightarrow \quad f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

$$M(f) = f(c) = \frac{1}{(b - a)} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{3 - 0} \int_0^3 (4 - x) dx$$

$$M(f) = \frac{1}{3} \left[\left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=3} - \left(4x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=0} \right] = \frac{5}{2}$$

Teorema fundamental do Cálculo. Parte I

Se f for contínua em $[a, b]$, então a função

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{é derivável em todo ponto } x \text{ em } [a, b] \text{ e}$$

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Exemplo: (1) Determine $F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\pi}^x \cos(t) dt$.

(2) Determine $F'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$.

(3) Determine $F'(x) = \frac{d}{dx} \int_{-\pi}^{x^2} \cos(t) dt$.

Teorema fundamental do Cálculo. Parte II

Se f for contínua em $[a, b]$ e se $F(x)$ é qualquer primitiva de $f(x)$ em $[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Exemplo: Determine

(1) $\int_{-1}^3 (x + 1) dx$

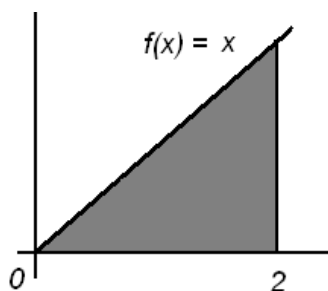
$$(2) \int_{-1}^3 (x^3 + 1) dx$$

$$(3) \int_{-1}^3 (x^3 - 2x^2 - 5x + 1) dx$$

Cálculo de áreas

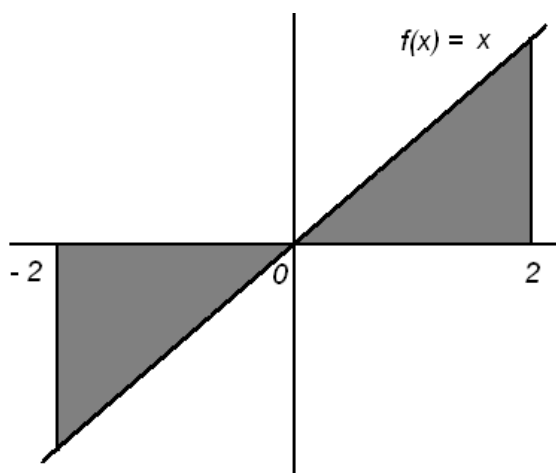
Exemplo 01: Calcule a integral definida de $f(x) = x$ no intervalo $[0, 2]$.

Exemplo 02: Determine a área da região entre o eixo x e o gráfico de $f(x) = x$ no intervalo $[0, 2]$.



Exemplo 03: Calcule a integral definida de $f(x) = x$ no intervalo $[-2, 2]$.

Exemplo 04: Determine a área da região entre o eixo x e o gráfico de $f(x) = x$ no intervalo $[-2, 2]$.



Exemplo 05: Calcule a integral definida de $f(x) = x^2$ no intervalo $[-2, 2]$.

Exemplo 06: Determine a área da região entre o eixo x e o gráfico de $f(x) = x^2$ no intervalo $[-2, 2]$.

Exemplo 07: Calcule a integral definida de $f(x) = x^3$ no intervalo $[-2, 2]$.

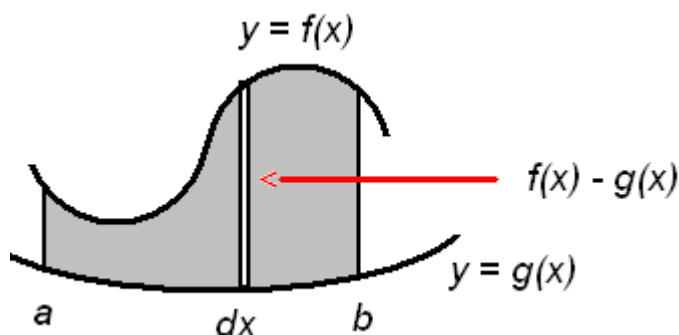
Exemplo 08: Determine a área da região entre o eixo x e o gráfico de $f(x) = x^3$ no intervalo $[-2, 2]$.

Exemplo 09: Calcule a integral definida de $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ no intervalo.

Exemplo 10: Determine a área da região entre o eixo x e o gráfico de $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ no intervalo $[-1, 2]$.

A área entre duas curvas

Suponha que sejam dadas duas curvas, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, com pontos de interseção em $x = a$ e $x = b$, e com $f(x) > g(x)$ no intervalo $a < x < b$.



O elemento de área é, então,

$$dA = [f(x) - g(x)] dx$$

e a área total é

$$A = \int dA = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Passos que devem ser seguidos para se achar uma área por integração

Passo 1: Esboçar a região cuja área quer se determinar. Anotar no esboço as equações das curvas limites e achar seus pontos de interseção.

Passo 2: Decidir se vão ser utilizadas faixas verticais com largura dx ou horizontais com altura dy e desenhar uma faixa típica no esboço.

Passo 3: Olhando o esboço e usando as equações das curvas limites, anotar a área dA da faixa típica como o produto do comprimento pela largura. Expressar dA inteiramente em termos da variável x ou y que aparece na largura (dx) ou na altura (dy).

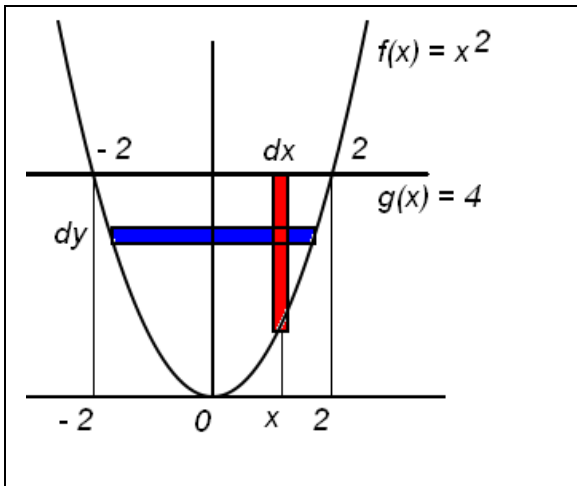
Passo 4: Integrar dA entre os limites x ou y apropriados, sendo esses limites encontrados no esboço.

Exemplo 01: Determine a área da região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4$.

Determinando os pontos de interseção

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x' = -2 \text{ e } x'' = 2$$



$$dA = [g(x) - f(x)] dx = (4 - x^2) dx$$

$$A = \int dA = \int_{-2}^2 [4 - x^2] dx$$