E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

Integrais definidas

Considere uma função contínua arbitrária f(x) definida em um intervalo fechado [a, b].

Começe dividindo o intervalo [a, b] em n subintervalos escolhendo n-1 pontos, digamos x_1, x_2, ... x_{n-1}, entre a e b, sujeitos apenas a condição

$$a < x_1 < x_2 < .... < x_{n-1} < b$$

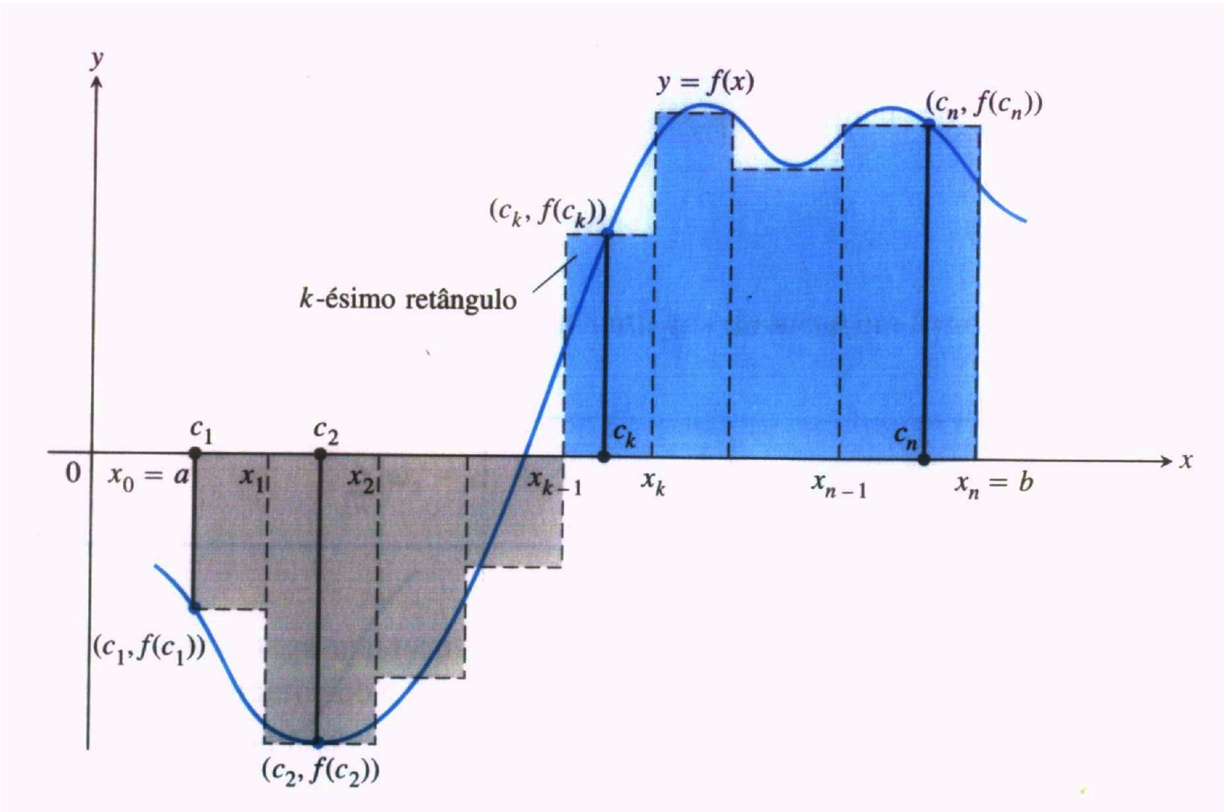
Para tornar a notação coerente, denote a por x_0 e b por x_n.

O conjunto

$$P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n\}$$ é chamado de partição de [a, b].

Seja $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$

Selecione em cada subintervalo um número c_k. Considere em cada subintervalo um retângulo com uma base no eixo x de valor Δx_k e que toca a curva y = f(x) em (c_k, f(c_k)). Veja gráfico abaixo.



Os retângulos permitem fazer uma aproximação para o cálculo da região que fica entre o gráfico da função y = f(x) e o eixo x.

Em cada subintervalo, formamos o produto $f(c_k) \bullet \Delta x_k$, que pode ser positivo, negativo ou nulo.

Por fim, tomamos a soma desses produtos:

$$s_n = f(c_1) \bullet \Delta x_1 + f(c_2) \bullet \Delta x_2 + f(c_3) \bullet \Delta x_3 + ... + f(c_n) \bullet \Delta x_n$$ **<=>**

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \bullet \Delta x_k$$

Esta soma, é chamada de soma de Riemann para f(x) no intervalo [a, b]

O limite

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \bullet \Delta x_k$$

se existir, é chamado de integral definida de f em [a, b].

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k) \bullet \Delta x_k$$

Propriedades das Integrais definidas

(1) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

(2) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(3) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

(4) $\int_a^b f(x) + g(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

(5) $\int_a^b f(x) - g(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

(6) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

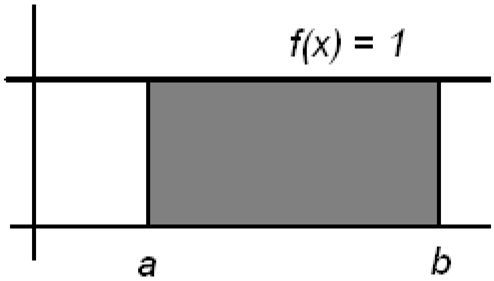
Exemplo: Suponha que $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 5$, $\int_{1}^{4} f(x)dx = -2$ e $\int_{-1}^{1} h(x)dx = 7$.

Encontre (1) $\int_4^1 f(x)dx$

(2) $\int_{-1}^{1} [2f(x) + 3h(x)]dx$

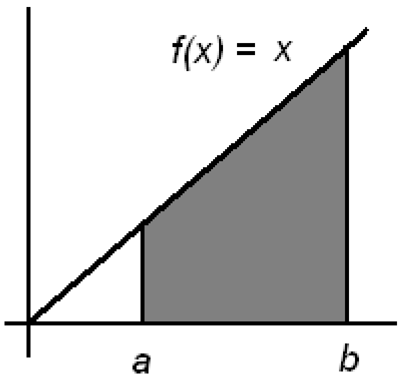
(3) $\int_{-1}^{4} f(x)dx$

Exemplos: 1) **Se f(x) = 1 então uma primitiva de f(x) é F(x) = x, logo**



$$\int_a^b f(x)\ dx = (b-a) \times 1 = b - a = F(b) - F(a)$$

2) **Se f(x) = x então uma primitiva de f(x) é F(x) = x²/2, logo**



$$\int_a^b x\ dx = \frac{bf(b)}{2} - \frac{af(a)}{2} = \frac{bb}{2} - \frac{aa}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = F(b) - F(a)$$

Exercícios: 1) $\int_4^1 (1-x)dx$ 2) $\int_0^1 (1-x)dx$

3) $\int_0^1 (1+x^2)dx$ 4) $\int_1^{-1} (1+x^2)dx$

5) $\int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)dx$ 6) $\int_{-2}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)dx$

Teorema do valor médio para integrais definidas

Se f for contínua em [a, b], então em algum ponto c de [a, b],

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

$$f(c) \bullet (b-a) = \int_a^b f(x)dx$$

Exemplo: Determine o valor médio de f(x) = 4 – x em [0, 3] e em que ponto do domínio dado realmente assume este valor.

$$f(c) \bullet (b-a) = \int_a^b f(x)dx \quad <=> \quad f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$M(f) = f(c) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3-0}\int_0^3 (4-x)dx$$

$$M(f) = \frac{1}{3}[(4x - \frac{x^2}{2})\,|_{x=3} - (4x - \frac{x^2}{2})\,|_{x=0}] = \frac{5}{2}$$

Teorema fundamental do Cálculo. Parte I

Se f for contínua em [a, b], então a função

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é derivável em todo ponto x em [a, b] e

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Exemplo: (1) Determine $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\pi}^x \cos(t)dt$.

(2) Determine $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$.

(3) Determine $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\pi}^{x^2} \cos(t)dt$.

Teorema fundamental do Cálculo. Parte II

Se f for contínua em [a, b] e se F(x) é qualquer primitiva de f(x) em [a, b], então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Exemplo: Determine

(1) $\int_{-1}^3 (x+1)dx$

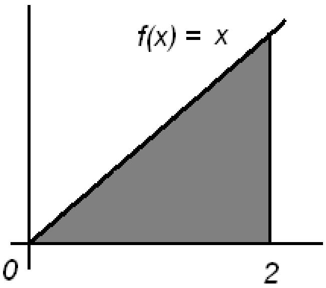
(2) $\displaystyle\int_{-1}^{3} (x^3 + 1)dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{3} (x^3 - 2x^2 - 5x + 1)dx$

Cálculo de áreas

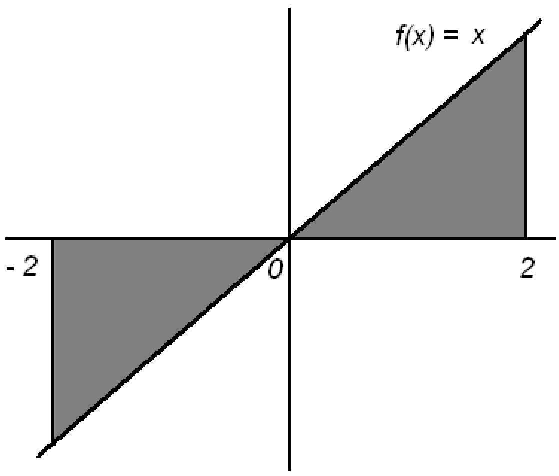
Exemplo 01: Calcule a integral definida de $f(x) = x$ no intervalo $[0,\ 2]$.

Exemplo 02: Determine a área da região entre o eixo x e o gráfico de $f(x) = x$ no intervalo $[0,\ 2]$.



Exemplo 03: Calcule a integral definida de $f(x) = x$ no intervalo $[-2,\ 2]$.

Exemplo 04: Determine a área da região entre o eixo x e o gráfico de $f(x) = x$ no intervalo $[-2,\ 2]$.



Exemplo 05: Calcule a integral definida de $f(x) = x^2$ no intervalo $[-2,\ 2]$.

Exemplo 06: Determine a área da região entre o eixo x e o gráfico de $f(x) = x^2$ no intervalo $[-2,\ 2]$.

Exemplo 07: Calcule a integral definida de $f(x) = x^3$ no intervalo $[-2,\ 2]$.

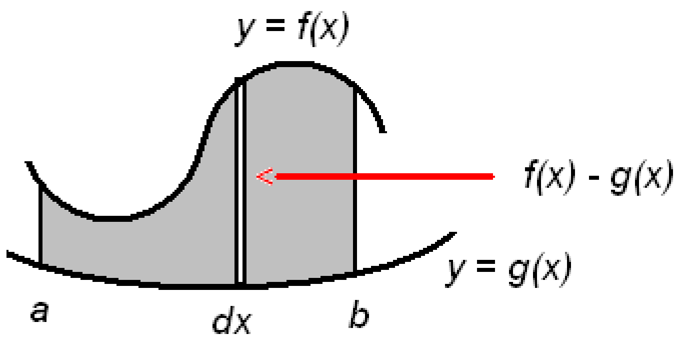
Exemplo 08: Determine a área da região entre o eixo x e o gráfico de $f(x) = x^3$ no intervalo $[-2,\ 2]$.

Exemplo 09: Calcule a integral definida de $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ no intervalo.

Exemplo 10: Determine a área da região entre o eixo x e o gráfico de $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ no intervalo $[-1,\ 2]$.

A área entre duas curvas

Suponha que sejam dadas duas curvas, y = f(x) e y = g(x), com pontos de interseção em x = a e x = b, e com f(x) > g(x) no intervalo a < x < b.



O elemento de área é, então,

$$dA = [\ f(x) - g(x)\ ]\ dx$$

e a área total é

$$A = \int dA \ = \ \int_a^b [\ f(x) - g(x)\ ]\ dx$$

Passos que devem ser seguidos para se achar uma área por integração

Passo 1: Esboçar a região cuja área quer se determinar. Anotar no esboço as equações das curvas limites e achar seus pontos de interseção.

Passo 2: Decidir se vão ser utilizadas faixas verticais com largura dx ou horizontais com altura dy e desenhar uma faixa típica no esboço.

Passo 3: Olhando o esboço e usando as equações das curvas limites, anotar a área dA da faixa típica como o produto do comprimento pela largura. Expressar dA inteiramente em termos da variável x ou y que aparece na largura (dx) ou na altura (dy).

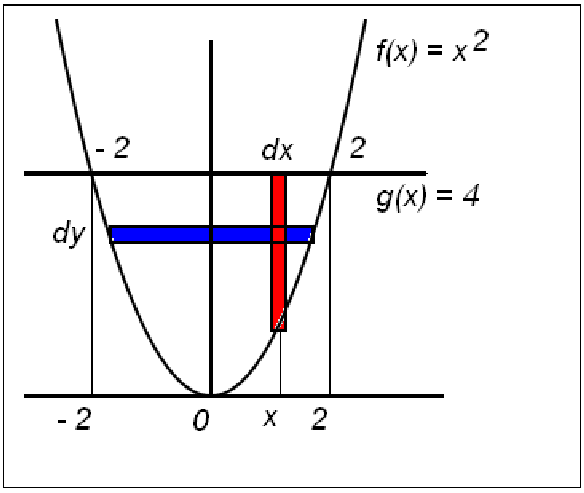
Passo 4: Integrar dA entre os limites x ou y apropriados, sendo esses limites encontrados no esboço.

Exemplo 01: Determine a área da região limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4$.

Determinando os pontos de interseção

f(x) = g(x)

$x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x' = -2 \quad e \quad x'' = 2$



$$dA = [\ g(x) - f(x)\ ]\ dx = (\ 4 - x^2\ )\ dx$$

$$A = \int dA = \int_{-2}^{2} [\ 4 - x^2\ ]\ dx$$