

Derivadas

Função	Derivada
$f(x)$	$f'(x)$
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
x^4	$4x^3$
x^5	$5x^4$
.....	
x^n	nx^{n-1}
$\text{sen } x$	$\text{cos } x$
$\text{cos } x$	$-\text{sen } x$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$
a^x	$a^x \ln a$
$\text{tg } x$	$\text{sec}^2 x$

Primitivas

Dizemos que $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$

Exemplos: (1) $F(x) = x^2$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$

(2) $F(x) = x^2 + 1$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$

(3) $F(x) = x^2 + 100$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$

(4) $F(x) = x^2 - 1000$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$

(5) $F(x) = x^2 + 2x + 1$ é uma primitiva de $f(x) = 2x + 2$

(6) $F(x) = x^2 + 2x - 1$ é uma primitiva de $f(x) = 2x + 2$

Função	Primitiva
$f(x)$	$F(x)$
1	$x + c$
$2x$	$x^2 + c$
$3x^2$	$x^3 + c$

$4x^3$	$x^4 + c$
$5x^4$	$x^5 + c$
.....	
nx^n	$x^{n+1} + c$
$\cos x$	$\text{sen } x + c$
$-\text{sen } x$	$\cos x + c$
e^x	$e^x + c$
$1/x$	$\ln x$
$a^x \ln a$	a^x
$\sec^2 x$	$\text{tg } x$

Integrais Indefinidas

A integral indefinida de f em relação a x é o conjunto de todas as primitivas de f.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \text{ onde } F'(x) = f(x)$$

Função	Primitiva	Integral indefinida
$f(x)$	$F(x)$	$\int f(x)dx$
1	$x + c$	$x + c$
$2x$	$x^2 + c$	$x^2 + c$
$3x^2$	$x^3 + c$	$x^3 + c$
$4x^3$	$x^4 + c$	$x^4 + c$
$5x^4$	$x^5 + c$	$x^5 + c$
.....		
nx^n	$x^{n+1} + c$	$x^{n+1} + c$
$\cos x$	$\text{sen } x + c$	$\text{sen } x + c$
$-\text{sen } x$	$\cos x + c$	$\cos x + c$
e^x	$e^x + c$	$e^x + c$
$1/x$	$\ln x + c$	$\ln x + c$
$a^x \ln a$	$a^x + c$	$a^x + c$
$\sec^2 x$	$\text{tg } x + c$	$\text{tg } x + c$

Se $y = F(x)$ é uma função cuja derivada é conhecida, digamos, $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$, podemos dizer que

$$F(x) = \int f(x)dx + C$$

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \Leftrightarrow F(x) = \int f(x)dx + C \quad (\text{são igualdades equivalentes})$$

Exemplos: (1) $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \int (n+1)x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$

(2) $\int \text{sen } x \, dx = - \int - \text{sen } x \, dx = - \cos x + C$

(3) $\int \cos x \, dx = \text{sen } x + C$

(4) $\int e^x \, dx = e^x + C$

(5) $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$

(6) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = 2\sqrt{x} + C$

Integrais imediatas

(1) $\int dx = \int 1 dx = x + C$

(2) $\int 2x \, dx = x^2 + C$

(3) $\int 3x^2 \, dx = x^3 + C$

(4) $\int 4x^3 \, dx = x^4 + C$

(5) $\int nx^{n-1} \, dx = x^n + C$

(6) $\int x \, dx = \frac{1}{2} \int 2x \, dx = \frac{x^2}{2} + C$

(7) $\int x^2 \, dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} + C$

$$(8) \quad \int x^3 dx = \frac{1}{4} \int 4x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$$

$$(9) \quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1} \int (n+1)x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$(10) \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(11) \quad \int \sin x dx = - \int - \sin x dx = - \cos x + C$$

$$(12) \quad \int e^x dx = e^x + C$$

$$(13) \quad \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} \int \ln a a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$(14) \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

Propriedades da integral indefinida

$$(1) \quad \int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$(2) \quad \int f(x) - g(x) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

$$(3) \quad \int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$(4) \quad \int mf(x) + ng(x) dx = m \int f(x) dx + n \int g(x) dx$$

Integração termo a termo

$$(1) \quad \int x^2 - 2x + 5 dx = \int x^2 dx - \int 2x dx + \int 5 dx =$$
$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

$$(2) \quad \int x^{-4} - 2x + 5 dx = \int x^{-4} dx - \int 2x dx + \int 5 dx =$$
$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

$$(3) \quad \int x^{2/3} - 2\cos x + 5\sin x dx = \int x^{2/3} dx - 2 \int \cos x dx + 5 \int \sin x dx =$$

$$\frac{x^{5/3}}{5/3} - 2\text{sen } x - 5\text{cos } x + C$$

$$(4) \quad \int \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int \sqrt{x} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$
$$\int x^{1/2} dx + \int x^{-1/2} dx =$$
$$\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C$$

$$(5) \quad \int x^{-2/3} - \frac{2}{3}x^{-2/3} + \frac{5}{4}x^{-4/3} dx$$

$$(6) \quad \int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} dx$$

$$(7) \quad \text{Resolver o problema de valor inicial } s'(t) = \text{sen } t + \text{cos } t, \quad s(\pi) = 1$$

$$s(t) = \int \text{sen } t dt + \int \text{cos } t dt + C$$

$$s(t) = -\text{cos } t + \text{sen } t + C$$

Como $s(\pi) = 1$ temos

$$s(\pi) = -\text{cos } \pi + \text{sen } \pi + C$$

$$1 = 1 + 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

Portanto,

$$s(t) = -\text{cos } t + \text{sen } t$$

A regra da potência na forma integral. Integração por substituição

$$u'(x) = \frac{du}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dx} = u'(x) \quad \Leftrightarrow \quad du = u'(x)dx$$

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(u(x)) + C$$

$$\int u(x)^n u'(x) dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{u(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

Exemplos:

$$(1) \quad \int \sqrt{1+x^2} 2x dx$$

$$u = 1+x^2 \quad \Rightarrow \quad du = u'(x)dx \quad \Rightarrow \quad du = 2xdx$$

$$\int \sqrt{1+x^2} 2x dx = \int \sqrt{u} du = \int u^{1/2} du =$$

$$\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{(1+x^2)^{3/2}}{3/2} + C$$

$$(2) \int \sqrt{4x-1} \, dx$$

$$(3) \int \sqrt{3-2x} \, dx$$

$$(5) \int 3x\sqrt{1-3x^2} \, dx$$

$$(7) \int \cos(7x+5) \, dx$$

$$(9) \int \frac{2x}{3\sqrt{x^2+1}} \, dx$$

$$(4) \int x^4\sqrt{1-x^2} \, dx$$

$$(6) \int \frac{3}{(2-x)^2} \, dx$$

$$(8) \int x^2 \sin x^3 \, dx$$

$$(10) \int \frac{2e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$$

A Integral $\int \frac{1}{u} \, du$

A equação $\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$, $u > 0$ **conduz a fórmula**

$$\int \frac{1}{u} \, du = \ln u + C$$

Se $u < 0$ **então** $\int \frac{1}{u} \, du = \int \frac{1}{-u} \, d(-u) = \ln(-u) + C$

Portanto $\int \frac{1}{u} \, du = \ln|u| + C$

Exemplos:

$$(1) \int \frac{2x}{x^2-5} \, dx$$

$$(3) \int \frac{x}{x^2+4} \, dx$$

$$(5) \int \sin^5\left(\frac{x}{3}\right) \cos\left(\frac{x}{3}\right) dx$$

$$(2) \int \operatorname{tg} x \, dx$$

$$(4) \int \frac{\sin x}{2-\cos x} \, dx$$

$$(6) \int x^{1/2} \sin(x^{3/2}+1) \, dx$$

Exercícios:

(1) – Determine uma primitiva para cada uma das funções a seguir:

1) $6x$

2) x^7

3) $x^7 - 6x + 8$

4) $-3x^{-4}$

5) $x^{-4} + 2x + 3$

6) $x^3 - \frac{1}{x^3}$

7) $\sqrt{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}$

8) $\text{sen}(\pi x) - 3\text{sen}(3x)$

(02) Calcule as integrais nos seguintes exercícios:

1) $\int 4x - 1 \, dx$

2) $\int 3x^2 - \frac{x}{2} \, dx$

3) $\int \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3} \, dx$

4) $\int 4\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} \, dx$

5) $\int x^2 - 2\cos x \, dx$

6) $\int \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}} \, dx$

(03) Calcule, usando substituição, as integrais nos seguintes exercícios:

1) $\int x^2 \text{sen}(x^3) \, dx$

2) $\int \frac{2x}{x^2 - 5} \, dx$

3) $\int x^3(x^4 - 1)^2 \, dx$

4) $\int \frac{3}{(2-x)^2} \, dx$

5) $\int \frac{2e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$

6) $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \, dx$

(04) Resolver os problemas de valor inicial nos seguintes exercícios:

1) $\frac{dy}{dx} = 12x(3x^2 - 1)^3, \quad y(1) = 3$

2) $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x}, \quad y(1) = 3$

3) $\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1$

4) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^{-x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

5) $\frac{d^3y}{dx^3} = 1, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 1$

6) $\frac{d^2y}{dx^2} = 1 - e^{2x}, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = 0$

(05) Calcule as integrais nos seguintes exercícios:

1) $\int x^2(4x^2 - 1) dx$

2) $\int \sqrt{x^2 + x^4} dx$

3) $\int e^{-5x} dx$

4) $\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx$