E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

4 - Derivação implícita.

Considere a função y = f(x) definida por $x = y^2$. Então,

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(y^2) \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{d}{dx}(y) \quad \Rightarrow \; 1 = 2yy'$$

Uma função explícita de *y* em *x* expressa explicitamente y em termos de x e podem ser diferenciadas (ou derivadas) de acordo com as regras estudadas até agora.

Uma função implícita (algumas equações do tipo $f(x,y) = 0$) não podem explicitar y em relação a x.

Exemplo: $x^2y - x + y^2 = 0$

$$\frac{d}{dx}(x^2)y + x^2\frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^2)y + x^2\frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2xy + x^2y' - 1 + 2yy' = 0$$

$$(x^2 + 2y)y' = 1 - 2xy$$

$$y' = \frac{1 - 2xy}{(x^2 + 2y)}$$

Exercícios: 4) Calcular as derivadas das seguintes funções definidas implicitamente:

(1) $x^2 + xy - 2x = 1$

(2) $x^2y + 3xy^3 - x = 3$

(3) $y + seny = x$

(4) $x\cos y = y$

(5) $x^2 + y^2 = 1$

(6) $x^2\cos y + y^2 senx = 1$

(7) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

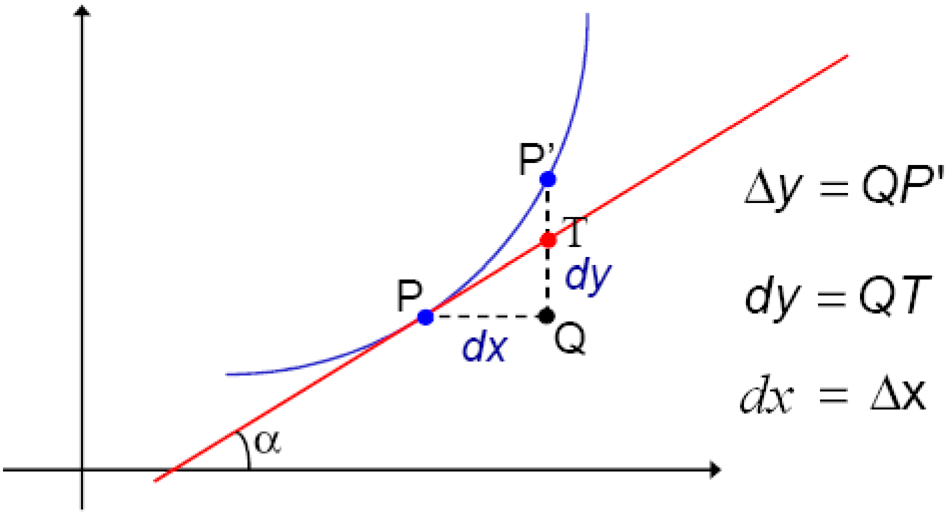
5 - Diferencial de x e y

Até agora, $\frac{dy}{dx}$ foi considerado como $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Em alguns casos é interessante interpretar dy e dx separadamente. Dessa forma, definimos:

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

Diferencial de x : dx

Diferencial de y : $dy = \frac{dy}{dx}dx = f'(x)dx$



Exemplos: 1) Se $y = x^2$ então $dy = f'(x)dx = 2xdx$

2) Se $y = 5x^4$ então $dy = f'(x)dx = 20x^3dx$

3) $d(\frac{1}{x}) = (-\frac{1}{x^2})dx = \frac{-dx}{x^2}$

4) $d(uv) = [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]dx$

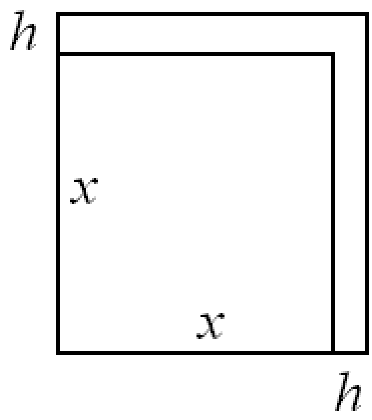
$d(uv) = u'(x)v(x)dx + u(x)v'(x)dx$

$d(uv) = vdu + udv$

5) Para ver como essa idéia funciona num caso simples, seja x o lado de um quadrado e $y = x^2$ a sua área. Se cada lado aumenta de uma quantidade pequena h, então o incremento da área é

$$dy = f'(x)dx = 2xdx = 2xh$$

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info



6) Utilize o conceito de diferencial para calcular o valor de $\sqrt[3]{1010}$. Sabe-se que $\sqrt[3]{1000} = 10$.

$$y = \sqrt[3]{x}$$

$$dy = f'(x)dx = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}dx$$

$$dx = 10 \quad \Rightarrow \quad dy = 0{,}033$$

$$\sqrt[3]{1010} = \sqrt[3]{1000} + 0{,}033 = 10 + 0{,}033 = 10{,}033$$

6 - Derivadas sucessivas

A derivada da primeira derivada é a segunda derivada. A derivada da segunda derivada é a terceira derivada, e assim por diante.

$$f'(x) \text{ é chamada de primeira derivada}$$
$$f''(x) \text{ é chamada de segunda derivada}$$
$$f'''(x) \text{ é chamada de terceira derivada}$$
$$f^4(x) \text{ é chamada de quarta derivada}$$
$$f^n(x) \text{ é chamada de } n-\text{ésima derivada}$$

Notações da derivada de ordem *n*:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^n(x) = y^{(n)} = D_x^{\,n} y$$

Ex. Calcular as derivadas de ordem superior de $f(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 10$

$$f'(x) = 7x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$
$$f''(x) = 42x^5 + 30x^4 + 20x^3 + 12x^2 + 6x + 10$$

$$f'''(x) = 210x^4 + 120x^3 + 60x^2 + 24x + 6$$
$$f'''(x) = 840x^3 + 360x^2 + 120x + 24$$
$$f^4(x) = 2520x^2 + 720x + 120$$
$$f^5(x) = 5040x + 720$$
$$f^6(x) = 5040$$
$$f^7(x) = 0$$

Ex. Calcular as derivadas de ordem superior de $f(x) = \operatorname{sen} x$

$$f'(x) = \cos x$$
$$f''(x) = -\operatorname{sen} x$$
$$f'''(x) = -\cos x$$
$$f^4(x) = \operatorname{sen} x$$
$$f^5(x) = \cos x$$
$$f^6(x) = -\operatorname{sen} x$$
$$f^7(x) = -\cos x$$
$$f^8(x) = \operatorname{sen} x$$

Exercícios: 12) – Calcular as derivadas sucessivas de cada uma das funções seguintes:

(1) $f(x) = 20$

(2) $f(x) = x$

(3) $f(x) = x^2$

(4) $f(x) = x^3$

(5) $f(x) = x^7$

(6) $f(x) = e^x$

(7) $f(x) = \operatorname{sen} x$

(8) $f(x) = \cos x$

(9) $f(x) = x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 10$

(10) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

(11) $f(x) = x^7 \operatorname{sen} x$

(12) $f(x) = x^7 e^x$

(13) $f(x) = x^7 \cos x$

(14) $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$

(15) $f(x) = e^x \cos x$

(16) $f(x) = e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$

(17) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+4}$

(18) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

(19) $f(x) = (2x+4)\ln 3x$

(20) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

(21) $f(x) = e^{-x}$

(22) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+4}$

(23) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

(24) $f(x) = (2x+4)\ln 3x$

(25) $f(x) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

(26) $f(x) = \dfrac{x^2 e^{-x}}{(x+4)e^{-x^3}}$

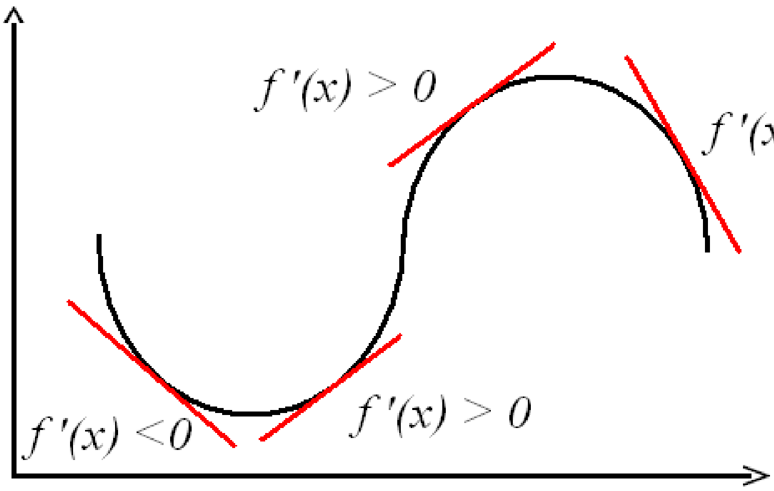
(27) $f(x) = \ln x$

(28) $f(x) = e^{2x} + e^{-2x} + \ln 2x$

7 - Aplicações do estudo de derivadas. Máximos e Mínimos. Pontos de inflexão.

A função f é dita crescente no ponto x se $f'(x) > 0$.

A função f é dita decrescente no ponto x se $f'(x) < 0$.



Exemplo: Ache o intervalo em que a função $y = 3x^2 + 7$ é crescente e o intervalo em que ela é decrescente.

$$f'(x) = 6x$$

$$f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad 6x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0$$

$$f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad 6x < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0$$

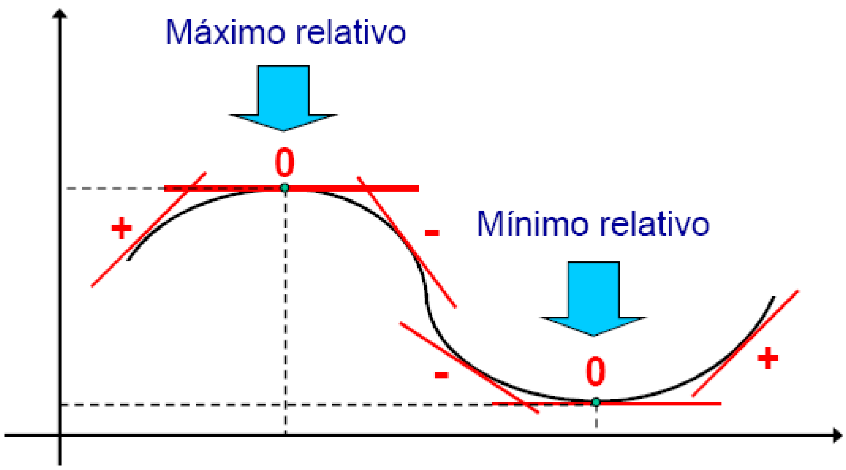
Portanto, a função $y = 3x^2 + 7$ é crescente para $x > 0$ e é decrescente para $x < 0$.

7.1 - Pontos de máximo e de mínimo

Dizemos que c é ponto de máximo relativo (ou local) da função f, se $f(c) \geq f(x)$ para todo x pertencente a uma vizinhança de c. Nesse caso, dizemos que $f(c)$ é o máximo relativo (ou local) da função f no ponto c.

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

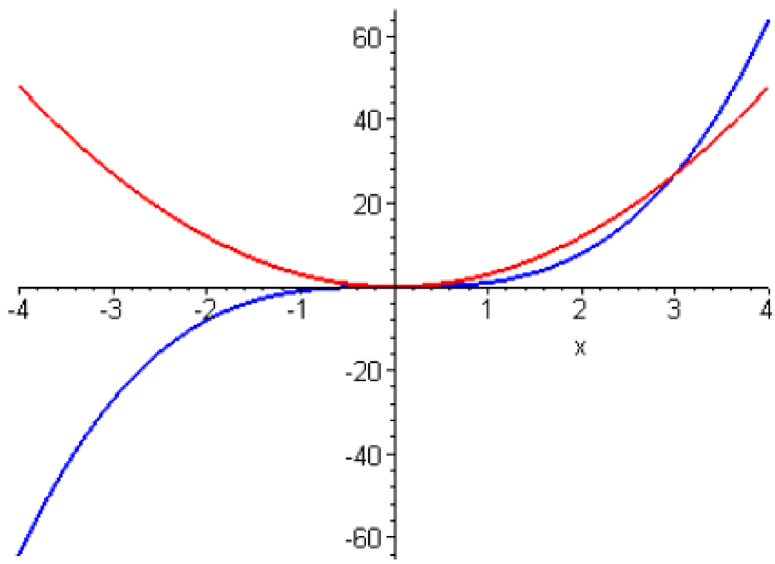
Dizemos que c é ponto de mínimo relativo (ou local) da função f, se $f(c) \leq f(x)$ para todo x pertencente a uma vizinhança de c. Nesse caso, dizemos que $f(c)$ é o máximo relativo (ou local) da função f no ponto c.



Observações:

1. Se $f(x)$ possui um máximo ou um mínimo relativo em $x = c$, então $f'(c)=0$

2. $f'(c)=0$ não implica na existência de um máximo ou de um mínimo relativo em $x = c$, mesmo que $f(x)$ e $f'(x)$ sejam contínuas em c.



3. Um máximo ou um mínimo relativo no ponto c implica em $f'(c) = 0$ somente se f e f' forem contínuas em c.

7.2 - Critérios para localização de pontos de máximo e de mínimo.

1. Calcule $f'(x)$;

2. Encontre os pontos críticos da função: as raízes da equação $f'(x) = 0$ e/ou os pontos de descontinuidade (finita ou infinita);

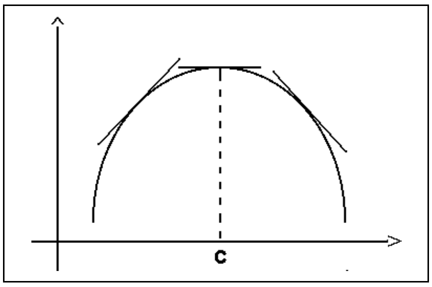
E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

3. Verifique a mudança de sinal em torno dos pontos críticos:

Se $f'(x)$ muda de + para –, então $f(c)$ é um máximo relativo.

Se $f'(x) > 0$ para $x < c$ e

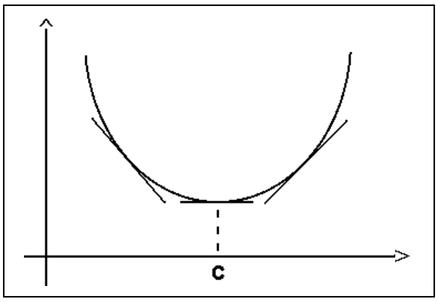
$f'(x) < 0$ para $x > c$ então c é um ponto de máximo de $f(x)$.



Se $f'(x)$ muda de – para +, então $f(c)$ é um mínimo relativo.

Se $f'(x) < 0$ para $x < c$ e

$f'(x) > 0$ para $x > c$ então c é um ponto de mínimo de $f(x)$.



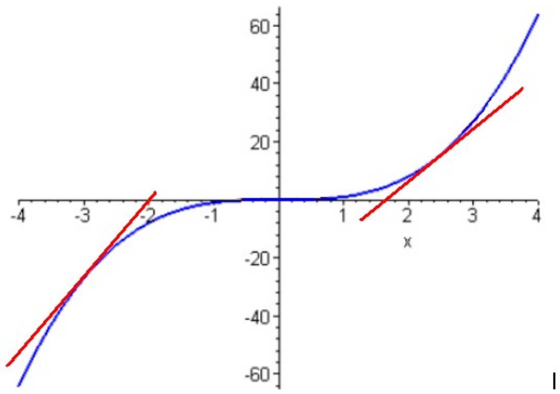
Se $f'(x)$ não muda de sinal, então c é um ponto de inflexão.

Se $f'(x) < 0$ para $x < c$ e

$f'(x) < 0$ para $x > c$ então c é um ponto de inflexão de $f(x)$.

Se $f'(x) > 0$ para $x < c$ e

$f'(x) > 0$ para $x > c$ então c é um ponto de inflexão de $f(x)$.



E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

Exemplos:

1) Encontre os máximos e/ou mínimos relativos da seguinte função:

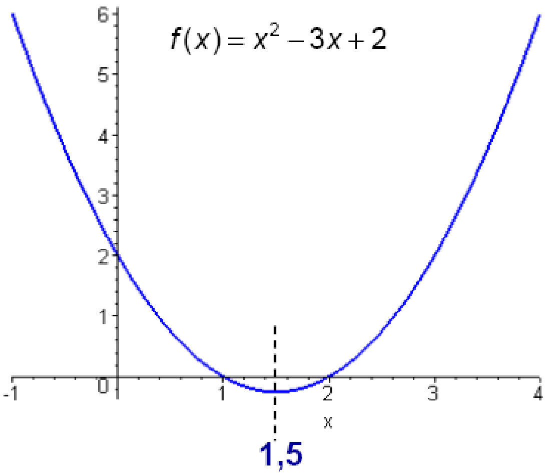
$$f(x) = x^2 - 3x + 2$$

Solução: $f'(x) = 2x - 3$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1{,}5$$

$$f'(1{,}4) = -1{,}2 \quad e \quad \Rightarrow \quad f'(1{,}6) = 0{,}2$$

Portanto, $x = 1{,}5$ é um ponto de mínimo relativo.



2) Encontre os máximos e/ou mínimos relativos da seguinte função:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

Solução: $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad ou \quad x = 2$$

$$f'(-0{,}1) = 3 \times (-0{,}1)^2 - 6 \times (-0{,}1) = 0{,}63$$

$$f'(0{,}1) = 3 \times (0{,}1)^2 - 6 \times (0{,}1) = -0{,}57$$

$$f'(1{,}9) = 3 \times (1{,}9)^2 - 6 \times (1{,}9) = -0{,}57$$

$$f'(2{,}1) = 3 \times (2{,}1)^2 - 6 \times (2{,}1) = 0{,}63$$

Portanto, $x = 0$ é um ponto de máximo relativo e $x = 2$ é um ponto de mínimo relativo.

7.3 - Critérios para a determinação da concavidade e dos pontos de inflexão.

Se $f''(x) > 0$ para todo $x \, \varepsilon \, D$, então f é tem a concavidade voltada para cima em D.

Se $f''(x) < 0$ para todo $x \, \varepsilon \, D$, então f é tem a concavidade voltada para baixo em D.

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

Se $f''(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f''(x) < 0$ para todo $x > c$, então c é um ponto de inflexão de $f(x)$.

Se $f''(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f''(x) > 0$ para todo $x > c$, então c é um ponto de inflexão de $f(x)$.

Exercícios: 13 – Estudar (1) o crescimento e o decrescimento, (2) as concavidades e os pontos de inflexão, (3) os pontos de máximo e de mínimo de cada uma das seguintes funções:

(1) $f(x) = 10x + 5$

(2) $f(x) = x^2 + 9$

(3) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$

(4) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{15}{2}x^2 + 50x + 5$

(5) $f(x) = x^3 - 1$

(6) $f(x) = x^4 - \dfrac{x^3}{3} + 10$

(7) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, x \neq 0$

(8) $f(x) = xe^{-x}$

(9) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - x^4 + 10$

(10) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^3}{3} + 5$

(11) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

(12) $f(x) = e^{-x^2}$

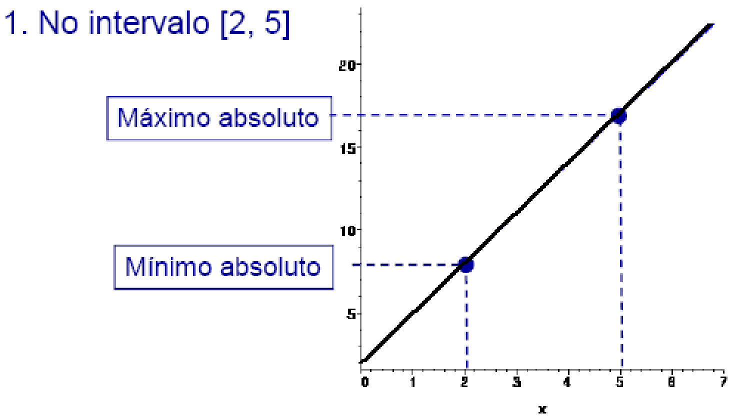
8 – Máximos e Mínimos Absolutos.

Dizemos que c é ponto de máximo absoluto da função f no intervalo $[a, b]$, se $f(c) \geq f(x)$ para todo x pertencente a esse intervalo. Nesse caso, dizemos que $f(c)$ é o máximo absoluto da função no intervalo.

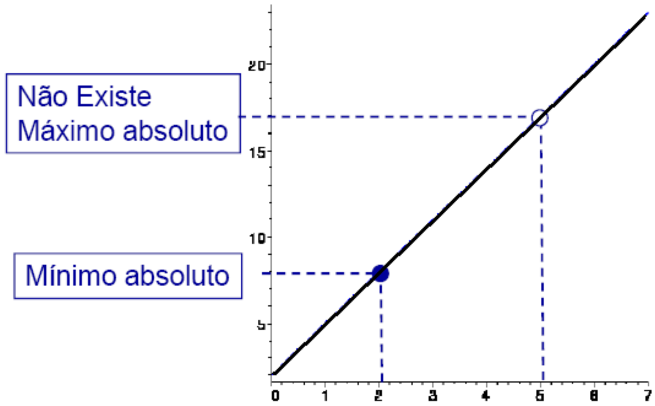
Dizemos que c é ponto de mínimo absoluto da função f no intervalo $[a, b]$, se $f(c) \leq f(x)$ para todo x pertencente a esse intervalo. Nesse caso, dizemos que $f(c)$ é o mínimo absoluto da função no intervalo.

Exemplos: Encontre os extremos absolutos de $y = 3x + 2$

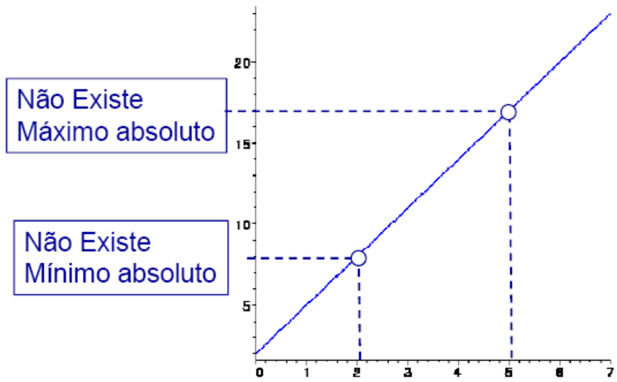
1. No intervalo [2, 5]
2. No intervalo [2, 5)
3. No intervalo (2, 5)



2. No intervalo [2, 5)



3. No intervalo (2, 5)



Exercício: Encontre os máximos e mínimos da função $f(x) = x^2 + 3x + 2$

4. No intervalo [-3, 1]
5. No intervalo [-3, 1)
6. No intervalo (-3, 1)

9 - Critérios para localização de pontos de máximo e de mínimo com a derivada de segunda ordem.

Seja uma função f, derivável em 1ª e 2ª ordens em c, com $f(x)$ e $f'(x)$ contínuas. Então:

– Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0$, c é um mínimo relativo;

– Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$, c é um máximo relativo;

– Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) = 0$, testar a vizinhança de c.

Exemplo: Dada a função $f(x) = x^3 - x^2 - x + 5$, calcule seus extremos relativos e indique se são máximos ou mínimos.

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 5$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1/3 \quad ou \quad x = 1$$

$$f''(x) = 6x - 2$$

$$f''(-1/3) = 6 \times (-1/3) - 2 = -4 < 0$$

$$f''(1) = 6 \times 1 - 2 = 4 > 0$$

A função $f(x) = x^3 - x^2 - x + 5$, possui um máximo local em $x = -1/3$ e um mínimo local em $x = 1$.

Exemplo: Dada a função $f(x) = x^3 + 3$, calcule seus extremos relativos e indique se são máximos ou mínimos.

$$f(x) = x^3 + 3$$

$$f'(x) = 3x^2$$

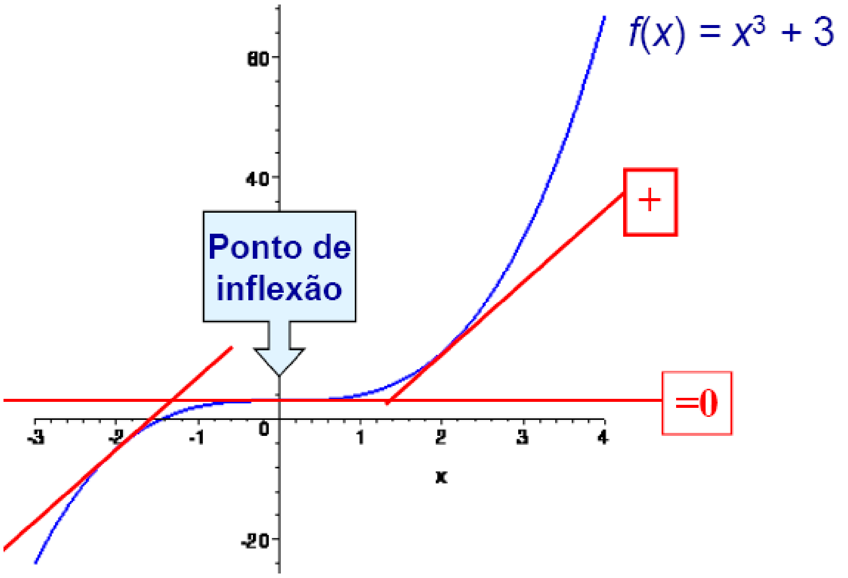
$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'(-0,1) = 3 \times 0,01 = 0,03 > 0$$

$$f'(0,1) = 3 \times 0,01 = 0,03 > 0$$



O amor é a força mais poderosa que possui o mundo e, entretanto, ela é a mais humilde que se possa imaginar. Mahatma Gandhi