E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno@interjato.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

2 - Derivadas

Considere um carro se movendo de acordo com o gráfico abaixo, onde a posição, ***y***, é medida em quilômetros e o tempo, ***x***, é medido em horas:

y=15	y=55	y=95	y=135	y=175
x=0	x=1	x=2	x=3	x=4

- A posição inicial do carro é o km 15;
- A cada intervalo de 1 hora, o carro se desloca 40km.
- Podemos encontrar a posição y em função do tempo x:

$$y = y(x) = 15 + 40x$$

Qual a taxa de variação do espaço percorrido por unidade de tempo? Ou ainda: qual a velocidade do carro?

$$\Delta x = 1 - 0 = 2 - 1 = 3 - 2 = 4 - 3 = 1$$

$$\Delta y = 55 - 15 = 95 - 55 = 135 - 95 = 175 - 135 = 40$$

Para dois instantes quaisquer, digamos $x=2$ e $x=5$ teremos as posições correspondentes $y=95$ e $y=215$. Portanto,

$$\Delta x = 5 - 2 = 3$$

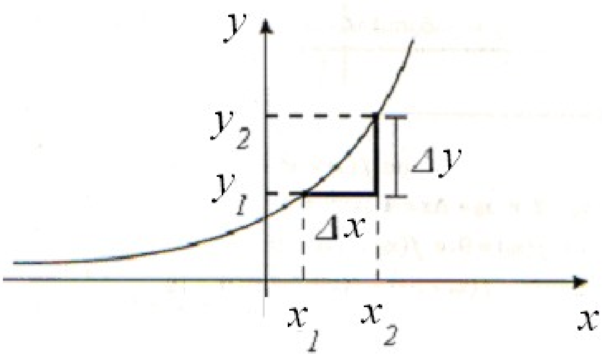
$$\Delta y = 215 - 95 = 120$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{120}{3} = 40$$

mede a taxa de variação do espaço percorrido por unidade de tempo ou ainda, a velocidade do carro.

2.1 - Taxa média de variação

Seja y uma função definida num conjunto D e x_1 e x_2 dois pontos de D. Quando a variável x passa do valor x_1 para o valor x_2 sofrendo uma variação $\Delta x = x_2 - x_1$, o correspondente valor da função passa de $f(x_1)$ para o valor $f(x_2)$ sofrendo, portanto, uma variação $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$.



E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno@interjato.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

O quociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

recebe o nome **de taxa média de variação da função** $y = f(x)$ quando x passa do valor x_1 para o valor x_2.

Exemplo: 1) Seja f(x) = 3x+1, com x real. Calcule a taxa de variação média de f(x) em relação a x no intervalo: (a) [3, 5] (b) [3, 3,1] (c) [3, 3,01] (d) [3, 3,001]

Exemplo: 2) Seja f(x) = x^2+1, com x real. Calcule a taxa de variação média de f(x) em relação a x no intervalo: (a) [1, 2] (b) [1, 1,1] (c) [1, 1,01] (d) [1, 1,001]

Exemplo: 3) Seja f(x) = x^2+3x+1, com x real. Calcule a taxa de variação média de f(x) em relação a x no intervalo: (a) [2, 4] (b) [2, 2,1] (c) [2, 2,01] (d) [2, 2,001]

Exemplo: 4) Seja f(x) = x^3+1, com x real. Calcule a taxa de variação média de f(x) em relação a x no intervalo: (a) [-1, 5] (b) [-1, -1,1] (c) [-1, -1,01] (d) [-1, -1,001]

2.2 - Derivada de uma função num ponto

A taxa de variação instantânea do espaço percorrido é a velocidade instantânea, dada por:

$$\Delta x = x - x_1 \quad \Leftrightarrow \quad x = x_1 + \Delta x$$

$$\Delta y = f(x) - f(x_1) = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

O limite, $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

quando existe, recebe o nome de **derivada da função f no ponto x_1** .

Exemplo: 5) Seja f(x) = 3x+1, com x real. Calcule a taxa de variação instantânea de f(x) em relação a x no ponto: (a) x = -1 (b) x = 1 (c) x = - 3 (d) x = 3

Exemplo: 6) Seja f(x) = 3x+1, com x real. Calcule a taxa de variação instantânea de f(x) em relação a x no ponto: (a) x = -1 (b) x = 1 (c) x = - 3 (d) x = 3

Exemplo: 7) Seja f(x) = x^2+3x+1, com x real. Calcule a taxa de variação instantânea de f(x) em relação a x no ponto: (a) x = -1 (b) x = 1 (c) x = - 3 (d) x = 3

Exemplo: 8) Seja f(x) = x^3+1, com x real. Calcule a taxa de variação instantânea de f(x) em relação a x no ponto: (a) x = -1 (b) x = 1 (c) x = - 3 (d) x = 3

Exemplo: 9) Seja f(x) = x^2+1, com x real. Calcule a taxa de variação instantânea de f(x) em relação a x num ponto genérico.

Exemplo: 10) Seja f(x) = x^3+1, com x real. Calcule a taxa de variação instantânea de f(x) em relação a x num ponto genérico.

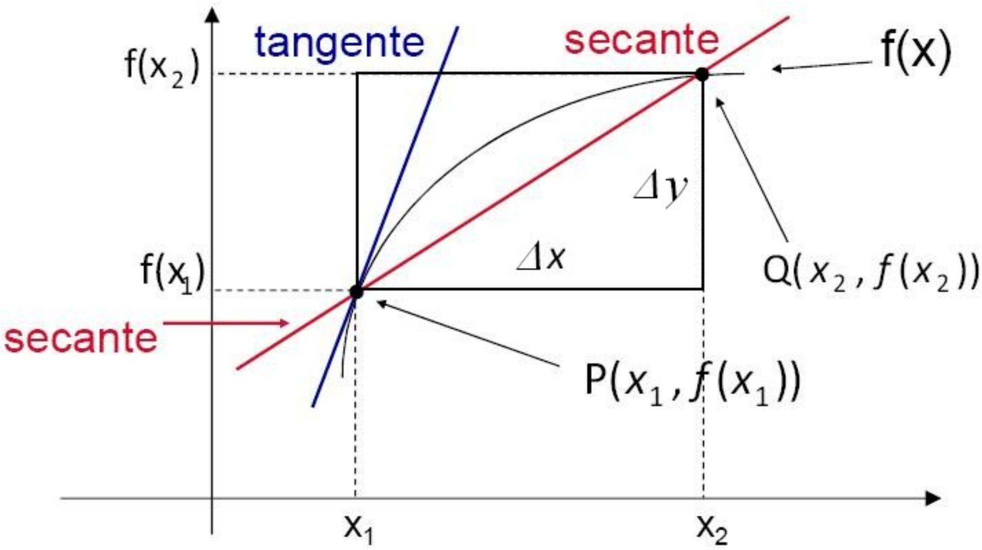
2.3 - Função derivada

Seja f uma função derivável em todo ponto x de um intervalo aberto I. A função definida por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

é chamada de **derivada da função f no ponto x**

2.3.1 – Interpretação geométrica



Notações para a função derivada

$$y' = \frac{dy}{dx} = D_x y = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Regras de derivação

	Função simples	**Derivada**
(1)	*f(x) = k*	*f′(x) = 0*

$$f(x) = k$$
$$f(x + \Delta x) = k$$
$$f(x + \Delta x) - f(x) = 0$$

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno@interjato.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f'(x)=0$$

(2) $f(x) = x$ $\qquad f'(x) = 1$

$$f(x)=x$$
$$f(x+\Delta x)=x+\Delta x$$
$$f(x+\Delta x)-f(x)=x+\Delta x-x=\Delta x$$
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad f'(x)=1$$

(3) $f(x) = x^2$ $\qquad f'(x) = 2x$

$$f(x)=x^2$$
$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2=x^2+2x\Delta x+\Delta x^2$$
$$f(x+\Delta x)-f(x)=x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x^2=2x\Delta x+\Delta x^2=\Delta x(2x+\Delta x)$$
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}=2x+\Delta x$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}(2x+\Delta x)=2x \qquad \Rightarrow \qquad f'(x)=2x$$

(4) $f(x) = x^3$ $\qquad f'(x) = 3x^2$

$$f(x)=x^3$$
$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^3=x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3$$
$$f(x+\Delta x)-f(x)=x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3-x^3=3x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3$$
$$f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)$$
$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta x(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2$$
$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}(3x^2+3x\Delta x+\Delta x^2)=3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x)=2x$$

(5) $f(x) = x^n$ $\qquad f'(x) = n\,x^{n-1}$

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno@interjato.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

(5)	$f(x) = x^{\alpha}$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
(6)	$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
(7)	$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
(8)	$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln a$
(9)	$f(x) = \text{sen } x$	$f'(x) = \cos x$
(10)	$f(x) = \cos x$	$f'(x) = - \text{sen } x$
(11)	$f(x) = \text{tg } x$	$f'(x) = \sec^2 x$

Exemplo: 11) Calcular a função derivada de

(a) $y = 3$ (b) $y = x$

(c) $y = x^2 + 1$ (d) $y = x^3$

(e) $y = x^4 – 5x^3 + 1$ (f) $y = x^5 + 3x^4 – 4x^3$

(g) $y = x^6$ (h) $y = x^7 - x^5 - 7x^3 – 4x$

(i) $y = x^8$ (j) $y = x^{200}$

(k) $y = x^{0,3}$ (l) $y = x^{1000}$

Exemplo: 12) Calcule a derivada das seguintes funções nos pontos sugeridos:

1. $f(x) = |x|$ para $x = 0$ e $x = 2$

2. $f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{para } x \leq 3 \\ x + 5, & \text{para } x > 3 \end{cases}$ nos pontos $x = 0$, $x = 3$ e $x = 6$

Se uma função é contínua em um ponto, isso não implica dizer que ela tem derivada nesse ponto.

Se uma função tem derivada em um ponto, isso implica em dizer que a função é contínua nesse ponto.

	Função composta	**Derivada**
(12)	$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
(13)	$f(x) = u(x) – v(x)$	$f'(x) = u'(x) – v'(x)$

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno@interjato.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

(14) $f(x) = u(x) \,.\, v(x)$ $\qquad f'(x) = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x)$

(15) $f(x) = k \,.\, u(x)$ $\qquad f'(x) = k \,.\, u'(x)$

(16) $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ $\qquad f'(x) = \dfrac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{v(x)^2}$

Exercícios: 1) Calcular a derivada de cada uma das funções seguintes, nos pontos indicados.

(1) $f(x) = 5, \quad x = 4$ $\qquad$ (2) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad x = -2$

(3) $f(x) = 2x + 5, \quad x = -3$ $\qquad$ (4) $f(x) = 1 - x^2, \quad x = 0$

(5) $f(x) = x^2 + 4, \quad x = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ (6) $f(x) = 3x^2 + 10x - 5, \quad x = 4$

(7) *Seja* $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$, *com x real. Ache a taxa de variação instantânea de y em relação a x para:* (a) $x_1 = 1$ $\qquad$ (b) $x_1 = -1$

(8) *Seja* $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$, *com x real. Ache a taxa de variação instantânea de y em relação a x num ponto genérico.*

(9) *Dada a função* $f(x) = x^2 + 3x + 2$, *com x real.*

(a) *Ache a inclinação da reta tangente a curva (ao gráfico) num ponto genérico.*

(b) *Use o resultado da parte (a) para achar a inclinação da reta tangente a curva no ponto (2, 12).*

(10) *Dada a função* $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$, *com x real.*

(a) *Ache a inclinação da reta tangente a curva (ao gráfico) num ponto (1, 1).*

(b) *Achar a inclinação da reta tangente a curva num ponto genérico.*

(11) *Dada a função* $f(x) = x^2 + 3x + 2$, *com x real, ache a equação da reta tangente a curva (ao gráfico) no ponto (1, 6).*

(12) *Ache a derivada em relação a x da função* $f(x) = x^3 - x + 2$ **.**

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno@interjato.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

(13) Ache a derivada em relação a x da função $f(x) = (x^3 - x)(x^3 + x)$.

(14) Ache a derivada em relação a x da função $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^3 + x} \quad x \neq 0, -1.$

(15) Ache a derivada em relação a x da função $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$.

(16) Ache a derivada em relação a x da função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 + x}}$.

Exercícios: 2) Calcular a derivada de cada uma das funções seguintes.

(1) $f(x) = 5$

(2) $f(x) = 2x + 5$

(3) $f(x) = x^2 + 4$

(4) $f(x) = 1 - x^2$

(5) $f(x) = 3x^2 + 10x - 5$

(6) $f(x) = 5x^7 - 8x^5 + 3x^2 + 10x - 5$

(7) $f(x) = (10x - 5)(2x - 5)$

(8) $f(x) = (3x^2 + 10x - 5)(x^2 + 4)$

(9) $f(x) = (x^5 - 5)(x^4 + 4)$

(10) $f(x) = (x^7 - 3x^5 + 3x^2 - 10x - 5)(x^6 - 5x^5 + 3x^4 - x^2 + 4)$

(11) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

(12) $f(x) = \dfrac{1 - x}{x - 1}$

(13) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

(14) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x - 1}$

(15) $f(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^3 - 8x^2 + 10x - 3$

(16) $f(x) = 5e^x + 2e^{-x}$

(17) $f(x) = 2 \ln x + 5^x - 3$

(18) $f(x) = 5 \text{ sen } x - 4 \cos x$

(19) $f(x) = \text{sen } x \cos x$

(20) $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{\cos x}$

(21) $f(x) = e^x \text{ sen } x \ln x \cos x$

(22) $f(x) = \dfrac{e^x \text{ sen } x}{\ln x \cos x}$

(23) $f(x) = 8x^2 \text{ sen } x + 10x \cos x - 3 \text{ sen } x \cos x$

(24) $f(x) = \dfrac{7x^3 \text{ sen } x + 8x^2 \cos x}{x^2 \cos x - 3x^4 \text{ sen } x}$

(25) $f(x) = \dfrac{e^x \text{ sen } x - \ln \cos x}{10^x \cos x + 15^x e^x}$

(26) $f(x) = \dfrac{(x^5 - x)(x^3 - 1)}{(x^7 + x^5)(x^4 - x^5)}$

(27) $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + (3x-2)(3-4x) + \dfrac{x^2 - 5x}{x^2 + 5x}$

(28) $f(x) = \dfrac{4}{3}x^3 - \dfrac{2}{5}x^2 + 10x + 50 + 12x^{0,35}$

(29) $f(x) = \dfrac{x^4 - 6x^2 + 20}{10} + 0{,}5.(0{,}8)^x$

(30) $f(x) = 5e^x - 10\ln x + x^3 - 2^x$

(31) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4}x^{20} + x^4 \ln 3 - \sqrt{3}x^3 + 3^x + 5e^x - 10\ln x - (\dfrac{1}{2})^x - 2^{-x}$

(32) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+4} + \dfrac{\ln x}{x} - e^x \cos x - 10^x \text{ sen } x + 5^x \ln x$

Regra da cadeia*: Se f e g são funções diferenciáveis, então a derivada da função composta* $f(x) = g(h(x))$ *é dada pela fórmula*

$$f'(x) = g'(h(x)) \times h'(x)$$

Se z = f(y) e y = h(x), então:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \times \frac{dy}{dx}$$

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno@interjato.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

Exercícios: 3) – Calcular a derivada das seguintes funções:

(1) $f(x) = (x+3)^4$

(2) $f(x) = 3.e^{2x+1}$

(3) $f(x) = 2x^3 + 4x^{-3}$

(4) $f(x) = 3(2x+2)^{\frac{1}{2}} - 5x^{-3}$

(5) $f(x) = (3(2x+2)^{\frac{1}{2}})(5x^{-3})$

(6) $f(x) = \sqrt{\dfrac{2x^3+3x}{4x^2}}$

(7) $f(x) = \text{sen}(2x^3 + 3x)$

(8) $f(x) = \text{sen}^2 x + \text{sen}(3x)$

(9) $f(x) = e^{\text{sen}\, x} + \text{sen}\, e^x$

(10) $f(x) = 5\,\text{sen}(x^2 + 1)$

(11) $f(x) = \ln(3x^2 + 9x + 4)$

(12) *Use a regra da cadeia para calcular* $\dfrac{dz}{dt}$, *quando:*

(a) $z = 3x^2y^3$, *sendo* $x = t^4$ *e* $y = t^2$;

(b) $z = 3\cos t - \sin(xy)$, *sendo* $x = 1/t$ *e* $y = 3t$;

(c) $z = e^{1-xy}$, *sendo* $x = t^{1/3}$ *e* $y = t^3$.