E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

1.6 Descontinuidades

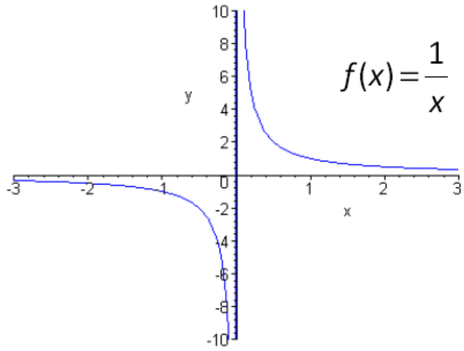
Descontinuidade Infinita

Uma função tem descontinuidade infinita em $x = a$, se $f(x)$ tende para infinito (positivo ou negativo) nesse ponto.

Exemplo 28: A função $f(x) = \frac{1}{x},\ x \neq 0$ tem descontinuidade infinita no ponto x = 0 pois

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Neste caso, o salto é igual a $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} - \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$



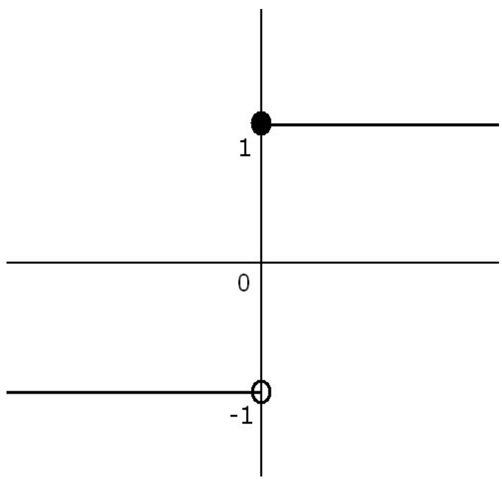
Descontinuidade de Salto

Uma função tem descontinuidade de salto em $x = a$, quando $f(x)$ varia abruptamente neste ponto ($x = a$).

Exemplo 29: A função $f(x) = \frac{|x|}{x},\ x \neq 0$ tem descontinuidade de salto no ponto x = 0 pois

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

Neste caso, o salto é igual a $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} - \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$

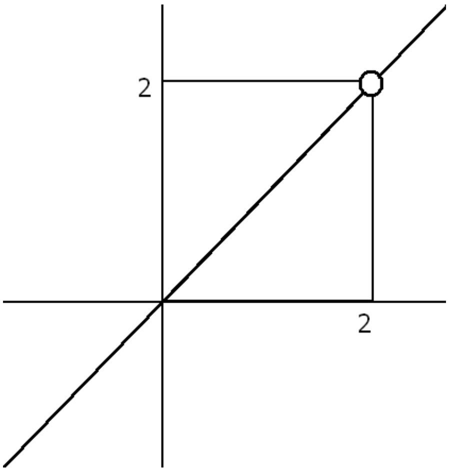


E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

Descontinuidade Removível

Quando existe $\lim_{x \to a} f(x)$, mas $f(x)$ não está definida em a.

Exemplo 30: A função $f(x) = x,\ x \neq 2$ tem descontinuidade removível no ponto $x = 2$ pois $\lim_{x \to 2} x = 2$ e $f(x)$ não está definida no ponto $x = 2$.



1.7 Exercícios

Determine os tipos de descontinuidades das seguintes funções:

(1) $f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & x \leq 3 \\ 2x + 10, & x > 3 \end{cases}$

(2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 3},\ x \neq -3$

(3) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 9}{2x + 3},\ x \neq -3/2$

(4) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{9x^2 - 1},\ x \neq -1/3$

1.8 Propriedades

Se f e g são funções contínuas em $x = a$, então:

$f + g$ é contínua em $x = a$;

$f - g$ é contínua em $x = a$;

$f \times g$ é contínua em $x = a$;

f / g é contínua em $x = a$, desde que g(a) $\neq$ 0.

1.9 Continuidade em um intervalo

Uma função é contínua em um intervalo aberto, se e somente se ela for contínua para todo número do intervalo aberto.

Em um intervalo fechado ou semi-aberto, devemos estender o conceito de continuidade para incluir os extremos, definindo:

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

– Continuidade à direita
– Continuidade à esquerda

Continuidade à direita

Uma função f é contínua à direita de $x = a$, se e somente se:
(1) existe $f(a)$
(2) existe $\lim_{x \to a^+} f(x)$
(3) $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Continuidade à esquerda

Uma função f é contínua à esquerda de $x = a$, se e somente se:
(1) existe $f(a)$
(2) existe $\lim_{x \to a^-} f(x)$
(3) $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Uma função é contínua em [*a*,*b*] se e somente se:
– for contínua no intervalo aberto (*a*,*b*)
– for contínua à direita em *a*
– for contínua à esquerda em *b*

Exemplo 31: A função $f(x) = x^2$ é contínua no intervalo $[0,\ 2]$ pois

– é contínua no intervalo $(0,\ 2)$;

– é continua a direita em 0, pois
(1) $f(0) = 0$
(2) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$
(3) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

– é continua a esquerda em 2, pois
(1) $f(2) = 2^2 = 4$
(2) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = 2^2 = 4$
(3) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$

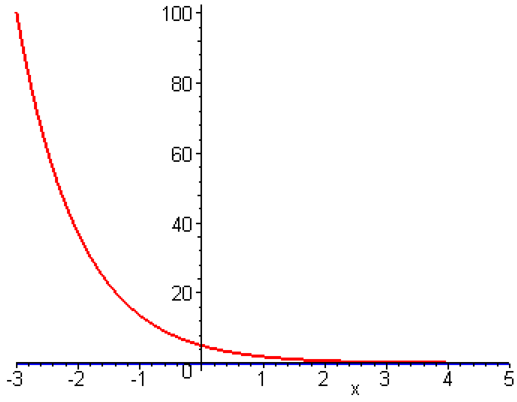
1.10 Assíntota Horizontal

Dizemos que a reta $y = b$ (b constante) é uma assíntota horizontal do gráfico de uma função f, se pelo menos uma das afirmações for verdadeira:

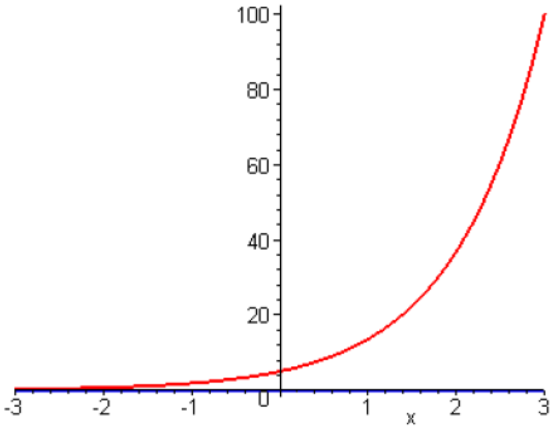
(1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$

(2) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = b$

Exemplo 32: A função $f(x) = e^{-x}$ tem assíntota horizontal dada pela função $f(x) = 0$, pois $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$.



Exemplo 33: A função $f(x) = e^{x}$ tem assíntota horizontal dada pela função $f(x) = 0$, pois $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$.



Dizemos que a reta $x = a$ (a constante) é uma assíntota vertical do gráfico de uma função f, se pelo menos uma das afirmações for verdadeira:

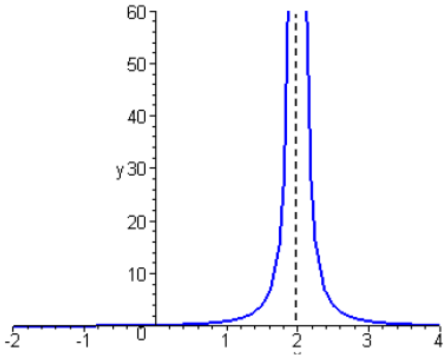
(1) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ (2) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

(3) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ (4) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

Exemplo 34: A função $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ tem assíntotas verticais em $x = 2$, pois a função não existe no ponto $x = 2$ e

(1) $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{1}{0^-} = +\infty$

(2) $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

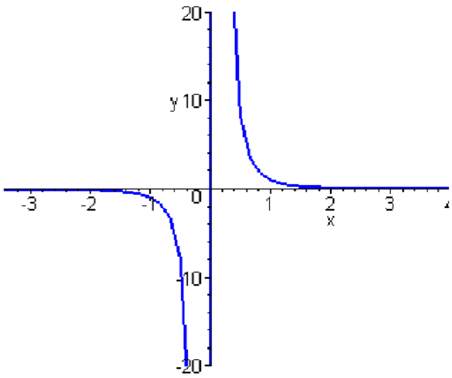


E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

Exemplo 35: A função $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ tem assíntotas verticais em $x = 0$, pois a função não existe no ponto $x = 0$ e

(1) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

(2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$



Exemplo 36: Determine para quais valores de x a A função $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ é descontínua, classificando o tipo de descontinuidade, esboçando seu gráfico e possíveis assíntotas.

Determinação dos pontos de descontinuidade:

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$, logo a função tem descontinuidade em $x = 1$.

Determinação das assíntotas verticais e dos tipos de descontinuidade:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

A reta $x = 1$ é uma assíntota vertical.

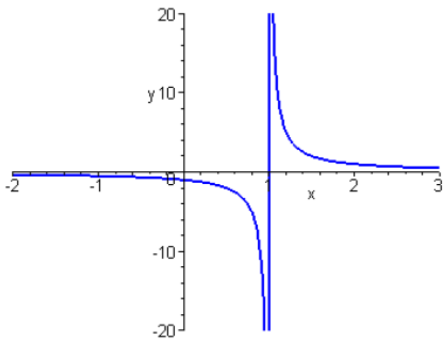
A função tem descontinuidade infinita em $x = 1$ ($\text{salto} = +\infty - (-\infty) = \infty$) .

Determinação das assíntotas horizontais e dos tipos de descontinuidade:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

A reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal.



Exemplo 37: Determine para quais valores de x a função $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x + 3}$ é descontínua, classificando o tipo de descontinuidade, esboçando seu gráfico e possíveis assíntotas.

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

Determinação dos pontos de descontinuidade:

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$, logo a função tem descontinuidade em $x=-3$.

Determinação das assíntotas verticais e dos tipos de descontinuidade:

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{x^2+5x+6}{x+3} = \lim_{x\to -3^+} (x+2) = -3+2 = -1$$

$$\lim_{x\to -3^-} \frac{x^2+5x+6}{x+3} = \lim_{x\to -3^-} (x+2) = -3+2 = -1$$

Neste caso, a função tem descontinuidade removível em $x=-3$, pois $\lim_{x\to -3} f(x)$ existe. Logo, não existe assíntota vertical em $x=-3$.

Acabaríamos com a descontinuidade redefinindo a função em $x=-3$ como −1, isto é, $f(-3)=-1$.

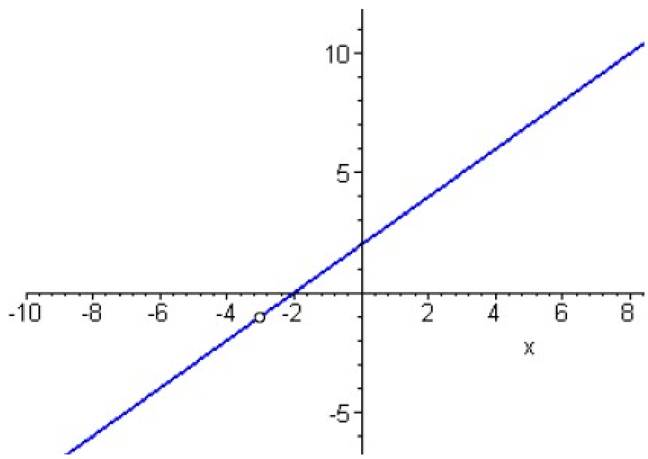
Determinação das assíntotas horizontais e dos tipos de descontinuidade:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+5x+6}{x+3} = \lim_{x\to +\infty} (x+2) = +\infty + 2 = \infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+5x+6}{x+3} = \lim_{x\to -\infty} (x+2) = -\infty + 2 = -\infty$$

A função $y=f(x)$ não tem assíntota horizontal.

Veja o gráfico de $y=f(x)$ a seguir:



Exemplo 38: Determine para quais valores de x a função $f(x) = \begin{cases} x - 2, \text{ se } x < -2 \\ 3, \text{ se } -2 \le x \le 3 \\ \dfrac{1}{x^2 - 2x - 1}, \text{ se } x > 3 \end{cases}$ é descontínua, classificando o tipo de descontinuidade, esboçando seu gráfico e possíveis assíntotas.

Determinação dos pontos de descontinuidade:

Como $f(x) = x - 2$ é contínua para todo $x < 2$, $f(x) = 3$ é contínua no intervalo $-2 < x < 3$ e $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 1}$ é contínua para todo $x > 3$, então devemos verificar a descontinuidade nos pontos $x = 2$ e $x = 3$.

Comecemos por $x = 2$:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (x - 2) = -2 - 2 = -4$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} 3 = 3$$

Como $\lim_{x \to -2^-} f(x) \neq \lim_{x \to -2^+} f(x)$, o limite não existe e a função tem descontinuidade de salto em $x = 2$.

$$\text{Salto} = 3 - (-4) = 3 + 4 = 7.$$

Vejamos agora em $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 3 = 3$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x^2 - 2x - 1} = \frac{1}{2}$$

Como $\lim_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim_{x \to 3^+} f(x)$, o limite não existe e a função tem descontinuidade de salto em $x = 3$.

Essa função não possui assíntotas verticais pois

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} (x - 2) = -2 - 2 = -4$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} 3 = 3$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 3 = 3$$

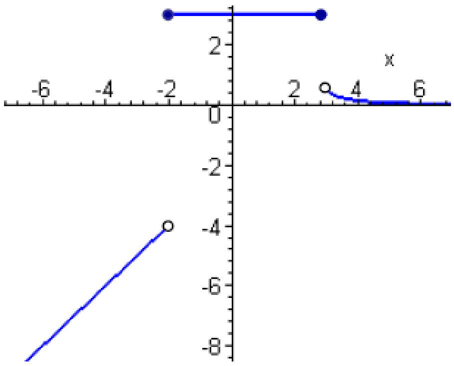
$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x^2 - 2x - 1} = \frac{1}{2}$$

Determinação das assíntotas horizontais e dos tipos de descontinuidade:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (x - 2) = -\infty - 2 = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2 - 2x - 1} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

A reta $f(x) = 0$ é uma assíntota horizontal.



1.11 Teoremas

Teorema do confronto: Sejam $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ funções tais que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo x num mesmo intervalo contendo um ponto a. Se $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$, então $\lim_{x \to a} h(x) = L$.

Teoremas fundamentais:

$$\lim_{x \to a} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x \to 0} \frac{b^x - 1}{x} = \ln b$$