E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

1.6 **Limites infinitos.**

Dizemos que a função *f* tem limite *infinito (+∞)* quando x se aproxima de *a*, se o valor de *f(x)* se torna muito grande.

Denotamos esse fato por: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$

Também costumamos dizer que

+∞ é o limite de $f(x)$ quando x tende para *a*.

Dizemos que a função *f* tem limite *menos infinito (-∞)* quando x se aproxima de *a*, se o valor de *f(x)* se torna negativo e muito grande em valor absoluto.

Denotamos esse fato por: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Também costumamos dizer que

- ∞ é o limite de $f(x)$ quando x tende para *a*.

Exemplo 20: Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{x}, x \neq 0$

x	$f(x)$
-1	-1
-0,5	-2
-0,1	-10
-0,01	-100
-0,001	-1000
-0,0001	-10000

x	$f(x)$
1	1
0,5	2
0,1	10
0,01	100
0,001	1000
0,0001	10000

Podemos dizer então que:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Exemplo 21: Calcule os limites laterais e o limite da função $f(x)$ quando $x \to 0$, caso existam, onde:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, x \neq 0$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}, x \neq 0$

(a) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$ **;**

Então, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

(a) $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$;

Então, $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} = \textit{não existe}$

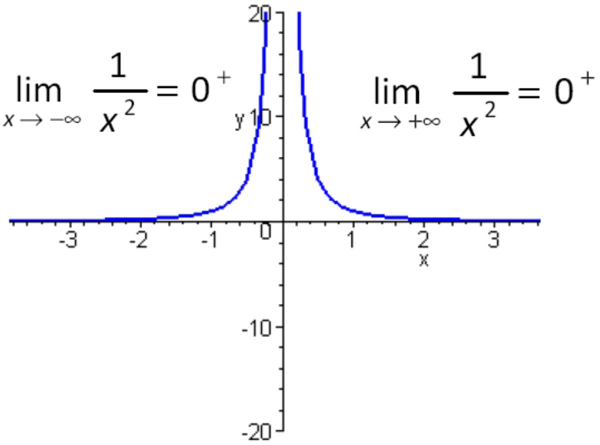

Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$

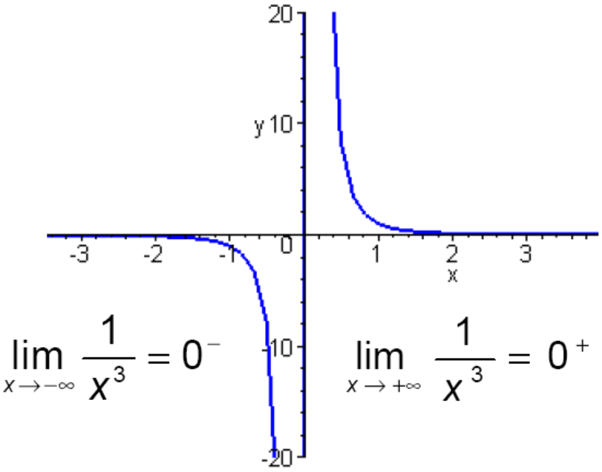

Gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^3}, x \neq 0$

Se r é um número inteiro positivo, então

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^r} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ se r for impar;

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^r} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ se r for par e

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^r} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ qualquer que seja r par ou impar;

1.7 Exercícios:

Calcule, se existir, os limites:

(01) $\lim_{x \to 2} \dfrac{x+2}{x^2-4}$

(02) $\lim_{x \to 2} \dfrac{-x+2}{(x-2)^2}$

(03) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3+x^2}}{x}$

(04) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3+x^2}}{x^2}$

(05) $\lim_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x-3}$

(06) $\lim_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x-4}$

(07) $\lim_{x \to 0} (\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2})$

(08) $\lim_{x \to 2} (\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x^2-4})$

1.8 Propriedades:

(1) Se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$, onde c é uma constante, então

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = +\infty + c = +\infty$$

(2) Se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$, onde c é uma constante, então

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = +\infty - c = +\infty$$

(3) Se $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$, onde c é uma constante, então

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = -\infty + c = -\infty$$

(4) Se $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$, onde c é uma constante, então

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = -\infty - c = -\infty$$

Exemplo 22: Se $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0} x + 3 = 3$, então

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} + x + 3 = +\infty + 3 = +\infty$$

(5) Se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$, onde c é uma constante qualquer diferente de zero, então

(i) $c > 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = +\infty \times c = +\infty$

(ii) $c < 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = +\infty \times c = -\infty$

Exemplo 23: Se $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0} x + 3 = 3$, então

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right) \times (x+3) = +\infty \times 3 = +\infty$$

(6) Se $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$, onde c é uma constante qualquer diferente de zero, então

(i) $c > 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = -\infty \times c = -\infty$

(ii) $c < 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = -\infty \times c = +\infty$

Exemplo 23: Se $\lim_{x \to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$ e $\lim_{x \to 0} x + 3 = 3$, então

$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \times (x+3) = -\infty \times 3 = -\infty$$

Exemplo 24: Se a é um número qualquer não nulo, então $\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$

Exemplo 25: Como $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$, então

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ não existe.

1.9 Exercícios:

(01) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$

(02) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{4 + x} - 2}{x}$

(03) $\lim_{x \to 1} \frac{x}{x^3 - 2x^2 - 2x + 3}$

(04) $\lim_{x \to -5} \frac{2}{x + 5}$

(05) $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 + 2^{1/x}}$

1.10 Limites no infinito.

Se os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos de um número L, a medida que x cresce indefinidamente, então dizemos que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Analogamente, se os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos de um número L, a medida que x dcresce indefinidamente, então dizemos que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

1.11 Exercícios

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

Determinar os limites das seguintes funções quando $x \to -\infty$ e $x \to \infty$ **:**

1. $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

2. $\dfrac{x^2 - 16}{x + 4}$

3. $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 5x + 6}$

4. $\dfrac{x^2 - 9}{(x - 3)^2}$

5. $\dfrac{(x + 4)^2}{x^2 - 16}$

6. $\dfrac{x^2 - 6x - 55}{x^2 + 4x - 5}$

7. $\dfrac{x^2 - 49}{x - 7}$

8. $\dfrac{x^2 - 25}{x + 5}$

9. $\dfrac{4x^2 - 9}{2x + 3}$

10. $\dfrac{3x - 1}{9x^2 - 1}$

11. $\dfrac{3x^2 - 8x - 16}{2x^2 - 9x + 4}$

12. $\dfrac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36}$

13. $\dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

14. $\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

15. $\dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

16. $\dfrac{\sqrt{x + 5} - 2}{x + 1}$

17. $\dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$

18. $\dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

19. $x^2 - 6x + 9$

20. $-5x^2 - 8x + 9$

20. $-5x^2 - \dfrac{8x}{-2x + 1} + 9$

21. $-5x^2 - \dfrac{8x}{x^2 - 1} + \dfrac{9}{x}$

22. $\dfrac{-5x^2 - 8x + 9}{4x^2 + 8x + 9}$

1.12 Funções contínuas.

Dizemos que y = f(x) é contínua no ponto x= a se

(1) existe o limite de f(x) quando x → a

(2) y = f(x) está definida no ponto x = a

(3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Exemplo 26: A função $f(x) = x^2$ é contínua no ponto x = 0 pois

(1) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$

(2) $f(0) = 0^2 = 0$

(3) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0 = f(0)$

Exemplo 27: A função $f(x) = \dfrac{1}{x}, \; x \neq 0$ não é contínua no ponto x = 0 pois

(1) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \textit{não existe}$, pois

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

1.13 Exercícios

Verifique se as seguintes funções são contínuas nos pontos indicados:

1) $f(x) = x^2$

2) $f(x) = x^3$

3) $f(x) = 2^x$

4) $f(x) = 2^{-x}$

5) $f(x) = 5x^2 - 8x + 5$

6) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1} \quad x \neq 1, -1$

7) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$

8) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 1}$

$\textit{nos pontos} \quad x = 0, \; x = 1, \; x = -1$

Verifique se as seguintes funções são contínuas nos pontos indicados:

1) $f(x) = 3x - 1 \quad \textit{no ponto} \quad x = 1$

2) $f(x) = 1 + |x| \quad \textit{no ponto} \quad x = 0$

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

3) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}, x \neq 0 \qquad no \quad ponto \quad x = 0$

4) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, x \neq 0 \quad e \quad f(0) = 1 \qquad no \quad ponto \quad x = 0$

5) $f(x) = 3 + \dfrac{1}{x} \quad , x \neq 0 \qquad no \quad ponto \quad x = 0$

6) $f(x) = 3 - \dfrac{1}{x} \qquad no \quad ponto \quad x = 0$

7) $f(x) = \dfrac{7x - 4}{5 - 8x} \quad nos \quad pontos \quad x = 0, \quad x = -\dfrac{5}{8}$

8) $f(x) = \dfrac{7x - 4}{5x^2 - 8x + 5} \qquad nos \quad pontos \quad x = 0, \quad x = -\dfrac{5}{8}$

9) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7x - 4}{8x + 5} \qquad nos \quad pontos \quad x = 0, \quad x = -\dfrac{5}{8}$

10). $f(x) = \dfrac{x^2 - 49}{x - 7}, \quad f(7) = 14 \qquad nos \quad pontos \quad x = 7, \quad x = -7$

11). $f(x) = \dfrac{x - 7}{x^2 - 49}, \quad f(7) = 14 \qquad nos \quad pontos \quad x = 7, \quad x = -7$

12) $f(x) = \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}, \quad f(-5) = -9 \qquad nos \quad pontos \quad x = 5, \quad x = -5$

13) $f(x) = \dfrac{x + 5}{x^2 - 25}, \quad f(-5) = -\dfrac{1}{10} \qquad nos \quad pontos \quad x = 5, \quad x = -5$

14) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 9}{2x + 3} \qquad nos \quad pontos \quad x = \dfrac{2}{3}, \quad x = -\dfrac{2}{3}$

15) $f(x) = \dfrac{2x + 3}{4x^2 - 9} \qquad nos \quad pontos \quad x = \dfrac{2}{3}, \quad x = -\dfrac{2}{3}$

16) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{9x^2 - 1}, f(\dfrac{1}{3}) = \dfrac{1}{2} \qquad nos \quad pontos \quad x = \dfrac{1}{3}, \quad x = -\dfrac{1}{3}$

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

17) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{9x^2 - 1}, f(\frac{1}{3}) = \dfrac{1}{2}$ $\quad$ *nos pontos* $x = \dfrac{1}{3},\ x = -\dfrac{1}{3}$

18) $f(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1},\ f(1) = \dfrac{1}{2}$ $\quad$ *no ponto* $x = 1$

19) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1},\ f(1) = \dfrac{1}{2}$ $\quad$ *no ponto* $x = 1$

20) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 5} - 2}{x + 1},\ f(-1) = 0$ $\quad$ *no ponto* $x = -1$

21) $f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{x + 5} - 2},\ f(-1) = 0$ $\quad$ *no ponto* $x = -1$

22) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x},\ f(0) = 1$ $\quad$ *no ponto* $x = 0$

23) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}},\ f(0) = 1$ $\quad$ *no ponto* $x = 0$