E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
Site: http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

1. Limites

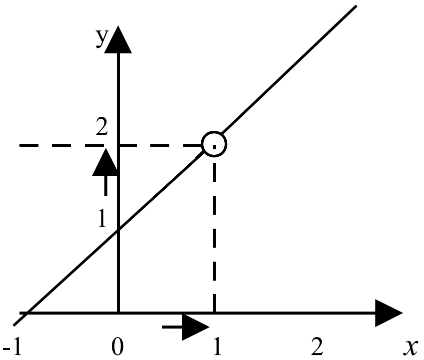
Considere a função $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. $f(x)$ é definida no domínio $\{x \in \Re \ / \ x \neq 1\}$.

Fatorando o numerador e cancelando os fatores comuns, obtemos $y = x + 1$, uma forma simplificada para $x \neq 1$.

Portanto, o gráfico de $y = f(x)$ é a reta $y = x + 1$ sem o ponto (1, 2). Embora $f(1)$ não esteja definido, podemos obter valores de $f(x)$ muito próximos de 2. Para isto, basta escolhermos para x valores bem próximos de 1.

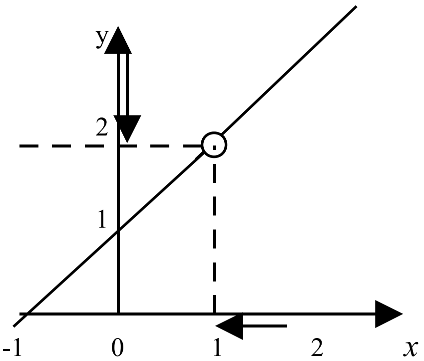
Na proximidade esquerda de x = 1 temos:

x	$f(x)$
0	1
0,5	1,5
0,9	1,7
0,99	1,97
0,999	1,997
0,9999	1,9997



Na proximidade direita de x = 1 temos:

x	$f(x)$
2	3
1,5	2,5
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001
1,0001	2,0001



1.1 Tendência de uma variável.

x	x	x
1,8	2,5	2,5
1,89	2,1	1,89
1,956	2,04	2,04
1,9934	2,015	1,956
1,9995	2,007	2,007
1,99994	2,0003	1,9995
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
2,0	2,0	2,0
$x \to 2{,}0^-$	$x \to 2{,}0^+$	$x \to 2{,}0$

Aquele que sabe o que quer já percorreu um longo caminho para alcança-lo. (Harold Shermam)

1.2 Limites laterais de uma função.

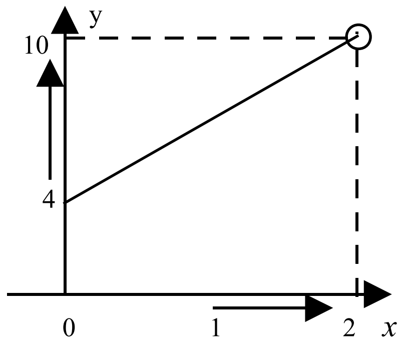
Considere a função $y = f(x) = \dfrac{(3x+4)(x-2)}{x-2}$. $f(x)$ é definida no domínio $\{x \in \Re \ / \ x \neq 2\}$.

Fatorando o numerador e cancelando os fatores comuns, obtemos $y = 3x + 4$, uma forma simplificada para $x \neq 2$.

Portanto, o gráfico de $y = f(x)$ é a reta $y = 3x + 4$ sem o ponto (2, 10)**.** Embora $f(2)$ não esteja definido, podemos obter valores de $f(x)$ muito próximos de 10. Para isto, basta escolhermos para x valores bem próximos de 2.

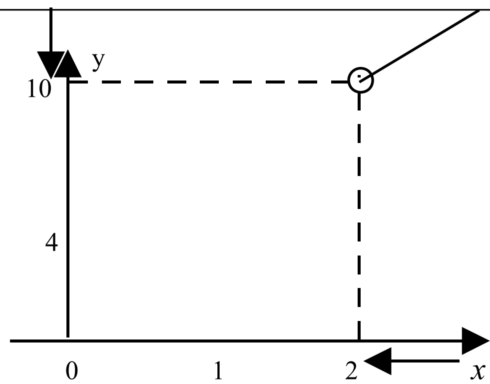
Na proximidade esquerda de x = 2 temos:

x	*f(x)*
1	7
1,5	8,5
1,9	9,7
1,99	9,97
1,999	9,997
1,9999	9,9997



Na proximidade direita de x = 2 temos:

x	*f(x)*
3	13
2,5	11,5
2,9	10,3
2,99	10,03
2,999	10,003
2,9999	10,0003



Dizemos que a função $f(x) = \dfrac{(3x+4)(x-2)}{x-2}$ tem limite 10 quando $\boldsymbol{x}$ se aproxima de 2, por números maiores ou menores que 2 e escrevemos:

$$\lim_{x \to 2} \frac{(3x+4)(x-2)}{x-2} = 10$$

Dizemos que

f(x) fica muito próximo de 10 quando x se aproxima de 2, ou ainda que

f(x) tem limite 10 **(** *f(x)* tende para 10) quando $x \to 2$ (x tende para 2)**.**

Aquele que sabe o que quer já percorreu um longo caminho para alcança-lo. (Harold Shermam)

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
Site: http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

Dizemos que

$f(x)$ tem limite lateral a esquerda igual a 10 quando $x \to 2^-$.

$f(x)$ tende para 10 quando x tende para 2 e $x < 2$.

$f(x)$ tem limite lateral a direita igual a 10 quando $x \to 2^+$.

$f(x)$ tende para 10 quando x tende para 2 e $x > 2$.

E escrevemos

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{(3x+4)(x-2)}{x-2} = 10,$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{(3x+4)(x-2)}{x-2} = 10$$

Alguns limites podem ser encontrados por substituição direta ou mediante uma simplificação.

Exemplo 01: Considere a função $y = f(x) = 5x + 2$. Então

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (5x+2) = 5 \times 2 + 2 = 12$$ (limite lateral a esquerda)

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (5x+2) = 5 \times 2 + 2 = 12$$ (limite lateral a direita)

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (5x+2) = 5 \times 2 + 2 = 12$$

Exemplo 02: Considere a função $y = f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}$, $x \neq 2$. Observe que

$$\frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = x^2 + 2x + 4$$

A fatoração de $x^3 - 8$ pode ser obtida mediante o algoritmo de Ruffini. Veja logo abaixo.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \left(\frac{x^3 - 8}{x - 2}\right) = \lim_{x \to 2^-} (x^2 + 2x + 4) = 12$$ (limite lateral a esquerda)

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(\frac{x^3 - 8}{x - 2}\right) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 + 2x + 4) = 12$$ (limite lateral a direita)

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \left(\frac{x^3 - 8}{x - 2}\right) = \lim_{x \to 2} (x^2 + 2x + 4) = 12$$

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
Site: http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

Algoritmo de Briot-Ruffini: Divisão de $x^3 - 8$ por x – 2.

	x^3	x^2	x	C
x - 2	1	0	0	-8
2	1	(2x1+0) = 2	(2x2+0) = 4	(2x4-8) = 0
	1	2	4	0

Resultado da divisão: $x^2 + 2x + 4$

1.3 Limite de uma função.

Dizemos que a função *f* tem limite *L* quando x se aproxima de *a*, se o valor de *f(x)* se aproxima do número *L.*

Denotamos esse fato por: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Também costumamos dizer que

L é o limite de *f(x)* quando x tende para *a*.

Dizemos que existe o limite $\lim_{x \to a} f(x)$ quando existem os limites laterais

$\lim_{x \to a^-} f(x)$, $\lim_{x \to a^+} f(x)$ e $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$.

Neste caso, $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$

Exemplo 03: Calcule os limites laterais e o limite da função $f(x)$ quando $x \to 0$, caso existam.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & se \quad x < 0 \\ 0 & se \quad x = 0 \\ x^2 + 4 & se \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 + 4 = 0 + 4 = 4$$

Como $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$, então $\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe.

Exemplo 04: Calcule o limite da função *f(x)* quando x -> 0, caso exista.

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
Site: http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

Desde que $|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$, temos que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1,$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1,$$ logo

$\lim_{x \to 0} f(x)$ não existe.

1.4 Utilização em Administração

- Determinação de valores máximos e mínimos
- Auxílio na confecção de gráficos
- Determinação do custo e receitas marginais

1.5 Teoremas sobre Limites

(1) Teorema da unicidade:

Se existe $\lim_{x \to a} f(x)$, então este limite é único.

Dada uma função *f*(*x*), se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, então, $L_1 = L_2$.

Em palavras, só existe um único limite para uma função em um determinado ponto.

(2) Limite da função constante:

Se c é uma constante, então, para qualquer número a, o limite de c quando x tende para a é igual a c

$$\lim_{x \to a} c = c$$

O valor do limite para qualquer ponto de uma função constante $f(x) = c$ é o próprio valor de c.

O limite de uma função constante é a própria constante.

Exemplo 05: $\lim_{x \to 3} 5 = 5$; $\lim_{x \to 0} 5 = 5$; $\lim_{x \to -2} 5 = 5$

(3) Limite da função identidade:

O limite da função identidade $f(x) = x$, quando $x \to a$, é igual a a

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Exemplo 06: $\lim_{x \to 3} x = 3$; $\lim_{x \to 0} x = 0$; $\lim_{x \to -3} x = -3$

(4) Limite da função afim:

Se *m* e *b* são constantes quaisquer, então, $\lim_{x \to a} mx + b = ma + b$

O limite de uma função afim (1º grau) em um determinado ponto é o valor da função no ponto.

Exemplo 06: $\lim_{x \to 4} (5x + 3) = 5 \times 4 + 3 = 20 + 3 = 23$;

$$\lim_{x \to -3} (-4x + 8) = -4 \times (-3) + 8 = 12 + 8 = 20$$

(5) Limite da soma:

O limite da soma é a soma dos limites

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

Exemplo 07: $\lim_{x \to 4} (5x + 3) = 23$

$$\lim_{x \to 4} (-4x + 8) = -8$$

$$\lim_{x \to 4} [(5x + 3) + (-4x + 8)] = \lim_{x \to 4} (5x + 3) + \lim_{x \to 4} (-4x + 8)$$

$$= 23 - 8 = 15$$

(6) Limite da diferença:

O limite da diferença é a diferença dos limites

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

Exemplo 08: $\lim_{x \to 4} (5x + 3) = 23$

$$\lim_{x \to 4} (-4x + 8) = -8$$

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
Site: http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

$$\lim_{x \to 4} [(5x+3) - (-4x+8)] = \lim_{x \to 4} (5x+3) - \lim_{x \to 4} (-4x+8)$$

$$= 23 - (-8) = 31$$

(7) Limite do produto:

O limite do produto é o produto dos limites

$$\lim_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x)$$

Exemplo 09: $\lim_{x \to 4} (5x+3) = 23$

$$\lim_{x \to 4} (-4x+8) = -8$$

$$\lim_{x \to 4} [(5x+3) \times (-4x+8)] = \lim_{x \to 4} (5x+3) \times \lim_{x \to 4} (-4x+8)$$

$$= 23 \times (-8) = -184$$

(8) Limite do produto de uma constante por uma função:

$$\lim_{x \to a} (k\ g(x)) = k \lim_{x \to a} g(x)$$

É um caso particular do limite do produto, basta fazer $f(x) = k$

(9) Limite do quociente:

O limite do quociente é o quociente dos limites:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Exemplo 10: $\lim_{x \to 4} (5x+3) = 23$

$$\lim_{x \to 4} (-4x+8) = -8$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{5x+3}{-4x+8} = \frac{\lim_{x \to 4} (5x+3)}{\lim_{x \to 4} (-4x+8)} = \frac{23}{-8} = -2{,}875$$

(10) Limite da potência:

O limite da potência inteira $[f(x)]^n$ é a potência inteira do limite da função

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$$

Exemplo 10: $\lim_{x \to 4} (5x - 17) = 3$

$$\lim_{x \to 4} (5x - 17)^5 = [\lim_{x \to 4} (5x - 17)]^5 = 3^5 = 243$$

(11) Limite da raiz n-ésima:

O limite da raiz n-ésima $\sqrt[n]{[f(x)]}$ é a raiz n-ésima do limite da função:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{[f(x)]} = \sqrt[n]{[\lim_{x \to a} f(x)]}$$

Exemplo 11: $\lim_{x \to 4} (5x - 17) = 3$

$$\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{(5x - 17)^5} = [\sqrt[3]{\lim_{x \to 4} (5x - 17)]^5} = \sqrt[3]{3^5} = \sqrt[3]{243}$$

Exemplos:

Exemplo 12: Se $f(x) = x$, temos:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} x = 3$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x = 0$$

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} x = -3$$

Exemplo 13: Se $f(x) = 10$, temos:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} 10 = 10$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} 10 = 10$$

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} 10 = 10$$

Aquele que sabe o que quer já percorreu um longo caminho para alcança-lo. (Harold Shermam)

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
Site: http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

Exemplo 14: Se $f(x) = 3 - x$, temos:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (3 - x) = \lim_{x \to 3} 3 - \lim_{x \to 3} x = 3 - 3 = 0$$

Exemplo 15: Se $f(x) = x^2 + 5x - 7$, temos:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 + 5x - 7) = \lim_{x \to 0} x^2 + \lim_{x \to 0} 5x - \lim_{x \to 0} 7 = 0 + 0 - 7 = -7$$

Exemplo 16: Se $f(x) = (x^2 + 4x - 1)(x^3 + 4)$, temos:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} [(x^2 + 4x - 1)(x^3 + 4)] = \lim_{x \to 2} (x^2 + 4x - 1) \lim_{x \to 2} (x^3 + 4) =$$

$$= (\lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} 4x - \lim_{x \to 2} 1)(\lim_{x \to 2} x^3 + \lim_{x \to 2} 4) = (4 + 8 - 1)(8 + 4) = 11 \times 12 = 132$$

Exemplo 17: Se $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$, temos:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{\lim_{x \to 3} x^2 - 1}{\lim_{x \to 3} x^2 + 1} = \frac{\lim_{x \to 3} x^2 - \lim_{x \to 3} 1}{\lim_{x \to 3} x^2 + \lim_{x \to 3} 1} = \frac{9 - 1}{9 + 1} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Exemplo 18: Se $f(x) = (x^3 + 2x)^4$ temos:

$$\lim_{x \to 1} (x^3 + 2x)^4 = [\lim_{x \to 1} (x^3 + 2x)]^4 = (\lim_{x \to 1} x^3 + \lim_{x \to 1} 2x)^4 = (1 + 2)^4 = 3^4 = 81$$

Exemplo 19: Se $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}}$ temos:

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}} = \sqrt{\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}} = \sqrt{\frac{\lim_{x \to 2} x^3 - 1}{\lim_{x \to 2} x^3 + 1}} = \sqrt{\frac{8 - 1}{8 + 1}} = \sqrt{\frac{7}{9}}$$

1.5 Exercícios:

Calcule, se existir, os limites:

1. $\lim_{x \to 5} (3x - 7)$
2. $\lim_{x \to -4} (5x + 2)$
3. $\lim_{x \to 2} (x^2 - 2x - 1)$
4. $\lim_{x \to 3} (2x^2 - 4x + 5)$

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
Site: http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

5. $\lim_{x \to -2} (x^3 + 8)$

6. $\lim_{x \to -1} (x^3 - 2x^2 + 3x - 4)$

7. $\lim_{x \to 3} \dfrac{4x - 5}{5x - 1}$

8. $\lim_{x \to 2} \dfrac{3x + 4}{8x - 1}$

9. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5}{2x + 6}$

10. $\lim_{x \to -1} \dfrac{2x + 1}{x^2 - 3x + 4}$

11. $\lim_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{8x + 1}{x + 3}}$

12. $\lim_{x \to -1} \sqrt{\dfrac{x^2 + 3x + 4}{x^3 - 1}}$

13. $\lim_{x \to 7} \dfrac{x^2 - 49}{x - 7}$

14. $\lim_{x \to -5} \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}$

15. $\lim_{x \to -\frac{3}{2}} \dfrac{4x^2 - 9}{2x + 3}$

16. $\lim_{x \to \frac{1}{3}} \dfrac{3x - 1}{9x^2 - 1}$

17. $\lim_{x \to 4} \dfrac{3x^2 - 8x - 16}{2x^2 - 9x + 4}$

18. $\lim_{x \to 4} \dfrac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36}$

19. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 8}{x + 2}$

20. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

21. $\lim_{x \to -3} \sqrt{\dfrac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 3}}$

22. $\lim_{x \to \frac{3}{2}} \sqrt{\dfrac{8x^3 - 27}{4x^2 - 9}}$

23. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

24. $\lim_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x + 5} - 2}{x + 1}$

25. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}{x}$

26. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$

27. $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2}$

28. $\lim_{x \to 0} \dfrac{2x^2 - x - 3}{x^3 + 2x^2 + 6x - 5}$

$$Dada\ a\ função\ f(x) = \begin{cases} x^2 + 9 & se\ x < -3 \\ 4 & se\ -3 \le x < 3 \\ x^2 - 9 & se\ x \ge 3 \end{cases}$$

(29) *Calcule* $\lim_{x \to -3} f(x)$

(30) *Calcule* $\lim_{x \to 0} f(x)$

Aquele que sabe o que quer já percorreu um longo caminho para alcança-lo. (Harold Shermam)

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno12@uol.com.br damasceno12@hotmail.com
Site: http://www.damasceno.info www.damasceno.info damasceno.info

(31) $Calcule \lim_{x \to 3} f(x)$

Calcule, se existir, os limites

(1) $\lim_{x \to 1^-} (x - |x|)$

(2) $\lim_{x \to 1^+} (x - |x|)$

(3) $\lim_{x \to 1} (x - |x|)$

(4) $\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|}$

(5) $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|}$

(6) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$

(7) $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

(8) $\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

(9) $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

(10) $Calcule \lim_{x \to 0} f(x) \quad para \quad f(x) = \begin{cases} 2 - x & se \quad x \geq 0 \\ 2 + x & se \quad x < 0 \end{cases}$

(11) $Calcule \lim_{x \to 0} f(x) \quad para \quad f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & se \quad x \geq 0 \\ 2x - 1 & se \quad x < 0 \end{cases}$