Matemática I

Bacharelado em Sistemas de Informação

Período 2011.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Matemática I

E-mails:

damasceno12@hotmail.com
damasceno12@uol.com.br
damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info
damasceno.info

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

Álgebra das proposições

Vimos que:

Uma proposição é uma declaração (afirmativa [P] ou negativa [~P]).

Cada proposição recebe um valor lógico F (falso) ou V (verdadeiro).

Exemplos:

1) "Sete mais dois é igual a nove" – é uma declaração (afirmativa), portanto uma proposição. Sabemos que é verdadeira (valor lógico V).

Matemática I

2) “Recife não é a capital do Brasil” – é uma declaração (negativa), portanto uma proposição. Sabemos que é verdadeira (valor lógico V).

3) “Sete mais dois é igual a quinze” – é uma declaração (afirmativa), portanto uma proposição. Sabemos que é falsa (valor lógico F).

4) “João, vá estudar a sua lição” – é uma sentença imperativa, e não uma declaração. Portanto não é uma proposição.

5) “O triplo de sete é oito?” – é uma pergunta, e não uma declaração. Portanto não é uma proposição.

Matemática I

Proposição fechada é toda proposição que pode receber um valor lógico (V ou F).

Proposição aberta é toda proposição que não pode receber um valor lógico (V ou F).

Exemplo: 1) O time X foi o campeão brasileiro de Football.

2) Buenos Aires é capital do país X.

Proposição simples: é uma proposição única, isolada.

Proposição composta: proposição formada por duas ou mais proposições simples, ligadas entre si por conectivos operacionais.

Matemática I

Exemplos:

1) Natal é a capital do Rio Grande do Norte e Recife é a capital de Pernambuco.
2) Se 7 + 3 = 10 então 3 = 10 -7

Tabelas verdades

Exemplo: p é uma proposição simples e V e F são seus valores lógicos possíveis.

P
V
F

Matemática I

Negação: ~p (não p)

p	~p
V	F
F	V

Conjunção: $p \wedge q$ (p e q)

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Matemática I

Disjunção: $p \vee q$ (p ou q)

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Implicação: $p \rightarrow q$ (Se p então q)

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Matemática I

Disjunção exclusiva: $p \veebar q$ (Ou p Ou q)

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Dupla implicação: $p \leftrightarrow q$ (p Se e somente Se q)

(Bicondicional)

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Matemática I

Negação da Implicação: $p \wedge \sim q$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim(p \rightarrow q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim(p \rightarrow q)$	p
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

Negação da Implicação: $p \wedge \sim q$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim(p \rightarrow q)$	p
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim(p \rightarrow q)$	p	$\sim q$
V	V	V	F	V	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	F	V

Matemática I

Negação da Implicação: $p \wedge \sim q$

p	q	$p \to q$	$\sim(p \to q)$	p	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
V	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	V	F

Exemplos:

1) $p \to q$: Se x é um número par então y é um número par

   $p \wedge \sim q$: x é um número par e y é um número impar

2) $p \to q$: Se Carlos passou de ano então Carlos passou em Matemática

   $p \wedge \sim q$: Carlos passou de ano e Carlos não passou em Matemática

Matemática I

Equivalência da Implicação: $\sim q \rightarrow \sim p$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim(p \rightarrow q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim(p \rightarrow q)$	$\sim p$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Matemática I

Equivalência da Implicação: $\sim q \rightarrow \sim p$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim(p \rightarrow q)$	$\sim p$	$\sim q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F
F	F	V	F	V	V

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim(p \rightarrow q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	F	V	V	V

Matemática I

Equivalência da Implicação: $\sim q \rightarrow \sim p$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim(p \rightarrow q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$\sim p \rightarrow \sim q$
V	V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	V	F
F	F	V	F	V	V	V	V

Exemplos:

1) $p \rightarrow q$: Se o número x é par então o número y é impar

   $\sim q \rightarrow \sim p$: Se o número y é par então o número x é impar

2) $p \rightarrow q$: Se Carlos passou de ano então Carlos passou em Matemática

   $\sim q \rightarrow \sim p$: Se Carlos não passou em Matemática então Carlos não passou de ano

Matemática I

Condição Suficiente. Condição necessária:

$p \rightarrow q$: p é condição suficiente para q – basta p acontecer para que q aconteça.

$\sim q \rightarrow \sim p$: q é condição necessária para p – se q não acontecer p não acontece.

Exemplos: Se Carlos passou de ano então Carlos passou em Matemática

Carlos passou de ano (V) é condição suficiente para que Carlos passou em Matemática (V)

Matemática I

Se Carlos não passou em Matemática então Carlos não passou de ano

Carlos passou em Matemática (V) é condição necessária para que Carlos passou de ano (V)

Conclusão: “Se Carlos passou de ano então Carlos passou em Matemática” é equivalente a qualquer uma das seguintes:

- “Carlos passar de ano é condição suficiente para Carlos ter passado em Matemática”.
- “Carlos passar em Matemática é condição necessária para Carlos passar de ano”.

Matemática I

Negação da Dupla Implicação (Bicondicional): $p \veebar q$ (Ou p Ou q exclusivo)

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\sim(p \leftrightarrow q)$	$p \veebar q$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	F	F

Exemplo:

$p \leftrightarrow q$: x é um número par se, e somente se, y é um número par.

$p \veebar q$: Ou x é um número par Ou y é um número par.

Condição Necessária e Suficiente: A expressão “p é condição necessária e suficiente para q” é equivalente a dupla implicação. Neste caso, abrem-se quatro possibilidades:

1) $p \to q$
2) $\sim q \to \sim p$
3) $q \to p$
4) $\sim p \to \sim q$

Exemplo:

"Você lavar o carro é condição necessária e suficiente para eu o emprestar a você."

"Você lava o carro se e somente se eu o emprestar a você."

1) Você lava o carro $\to$ Eu o empresto a você.
2) Eu não empresto o carro a você $\to$ Você não lava o carro.
3) Eu empresto o carro a você $\to$ Você lava o carro.
4) Você não lava o carro $\to$ Eu não o empresto a você.

Matemática I

Tautologia

Tautologia é toda proposição sempre verdadeira.

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

Contradição

Contradição é toda proposição sempre falsa.

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
V	F	F
F	V	F

Matemática I

(ESAF) Chama-se Tautologia a toda proposição que é sempre verdadeira, independentemente da verdade dos termos que a compõem. Um exemplo de Tautologia é:

a) Se João é alto, então João é alto ou Guilherme é gordo.

b) Se João é alto, então João é alto e Guilherme é gordo.

c) Se João é alto ou Guilherme é gordo, então Guilherme é gordo.

d) Se João é alto ou Guilherme é gordo, então João é alto e Guilherme é gordo.

e) Se João é alto ou não é alto, então Guilherme é gordo.

Matemática I

a) Se João é alto, então João é alto ou Guilherme é gordo.

Isso é equivalente a $p \rightarrow p \vee q$

p: João é alto

q: Guilherme é gordo

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow p \vee q$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Podemos concluir que "Se João é alto, então João é alto ou Guilherme é gordo" é realmente uma tautologia.

Matemática I

b) Se João é alto, então João é alto e Guilherme é gordo.

Isso é equivalente a $p \to p \wedge q$

p: João é alto

q: Guilherme é gordo

p	q	$p \wedge q$	$p \to p \wedge q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	V
F	F	F	V

Podemos concluir que "Se João é alto, então João é alto e Guilherme é gordo" não é uma tautologia.

Matemática I

c) Se João é alto ou Guilherme é gordo, então Guilherme é gordo.

Isso é equivalente a $p \vee q \rightarrow q$

p: João é alto

q: Guilherme é gordo

p	q	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	V
F	F	F	V

Podemos concluir que "Se João é alto ou Guilherme é gordo, então Guilherme é gordo" não é uma tautologia.

Matemática I

d) Se João é alto ou Guilherme é gordo, então João é alto e Guilherme é gordo.

Isso é equivalente a $p \vee q \rightarrow p \wedge q$

p: João é alto

q: Guilherme é gordo

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \vee q \rightarrow p \wedge q$
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

Podemos concluir que "Se João é alto ou Guilherme é gordo, então João é alto e Guilherme é gordo" não é uma tautologia.

Matemática I

e) Se João é alto ou não é alto, então Guilherme é gordo.

Isso é equivalente a $p \vee {\sim}p \rightarrow q$

p: João é alto

q: Guilherme é gordo

p	q	${\sim}p$	$p \vee {\sim}p$	$p \vee {\sim}p \rightarrow q$
V	V	F	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V

Podemos concluir que “Se João é alto ou não é alto, então Guilherme é gordo” não é uma tautologia.

Matemática I

(AFC 2002 ESAF) Dizer que não é verdade que Pedro é pobre e Alberto é alto, é logicamente equivalente a dizer que é verdade que:

a) Pedro não é pobre ou Alberto não é alto.

b) Pedro não é pobre e Alberto não é alto.

c) Pedro é pobre ou Alberto não é alto.

d) se Pedro não é pobre, então Alberto é alto.

e) se Pedro não é pobre, então Alberto não é alto.

Matemática I

p: Pedro é pobre

q: Alberto é alto

$p \wedge q$: Pedro é pobre e Alberto é alto

Dizer que não é verdade $\Leftrightarrow$ negar

$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

Portanto, a resposta correta é:

Pedro não é pobre ou Alberto não é alto

Alternativa a)

Em seu benefício

Não se agaste com o ignorante; certamente, não dispõe ele das oportunidades que iluminaram seu caminho.

Evite aborrecimento com as pessoas fanatizadas; permanecem no cárcere do exclusivismo e merecem compaixão como qualquer prisioneiro.

Não se perturbe com o malcriado; o irmão intratável tem, na maioria das vezes, o fígado estragado e os nervos doentes.

Ampare o companheiro inseguro; talvez não possua o necessário, quando você detém excessos.

Não se zangue com o ingrato; provavelmente, é desorientado ou inexperiente.

Ajude ao que erra; seus pés pisam o mesmo chão, e, se você tem possibilidades de corrigir, não tem o direito de censurar.

Desculpe o desertor; ele é fraco e mais tarde voltará a lição.

Auxilie o doente; agradeça ao divino poder o equilíbrio que você está conservando.

Esqueça o acusador; ele não conhece o seu caso desde o princípio.

Perdoe ao mau; a vida se encarregará dele.

* * *

André Luiz