

Matemática I

Bacharelado em
Sistemas de
Informação

Período 2011.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Matemática I

E-mails:

damasceno12@hotmail.com

damasceno12@uol.com.br

damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info

damasceno.info

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

A Lógica é uma ciência com características matemáticas, mas está fortemente ligada à Filosofia.

Ela cuida das regras do bem pensar, ou do pensar correto, sendo, portanto, um instrumento do pensar humano.

Aristóteles, filósofo grego (384-322 a.C), foi o seu principal organizador.

Através da Lógica pode-se avaliar a validade ou não de raciocínios que têm por base premissas iniciais.

Os exemplos a seguir mostram desenvolvimento de raciocínios lógicos:

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

Raciocínio I - (1ª premissa) Todo homem é mortal.
(2ª premissa) Sócrates é mortal.
Conclusão: Sócrates é homem.

Raciocínio II - (1ª premissa) Todo homem é mortal.
(2ª premissa) Sócrates é homem.
Conclusão: Sócrates é mortal.

À primeira vista, todos os dois raciocínios parecem verdadeiros.

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

Entretanto, o primeiro é falso, pois: Sócrates pode...
perfeitamente ser o gatinho da minha vizinha.

Já, o segundo raciocínio é universalmente verdadeiro.

Quais são as regras para a validação de uma conclusão a partir de afirmações anteriores?

Este é um dos principais objetivos deste curso.

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

George Boole (1815-1864), em seu livro "*A Análise Matemática da Lógica*", estruturou os princípios matemáticos da lógica formal, que, em sua homenagem, foi denominada Álgebra Booleana.

No século XX, Claude Shannon aplicou pela primeira vez a álgebra booleana em interruptores, dando origem aos atuais computadores.

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

São variadas as formas de se expressar. Vejamos algumas delas:

- (01) Feliz ano novo!
- (02) Chove.
- (03) Quando começam as férias?
- (04) x é maior que 27.
- (05) Três mais dois.
- (06) Paris é a capital da França.

Todos os exemplos acima têm um significado, entretanto, apenas o exemplo cinco não apresenta sentido completo.

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

O exemplo (5), por não ter um sentido completo é denominado *expressão*.

Aos demais exemplos chamamos de *sentenças*.

Sentença é uma forma de se expressar que apresenta um sentido completo.

As sentenças que apresentam variáveis são denominadas *sentenças abertas*.

Quando não existe a variável, a sentença é dita *sentença fechada*.

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

- (01) Feliz ano novo! (*sentença fechada*)
- (02) Chove. (*sentença fechada*)
- (03) Quando começam as férias? (*sentença fechada*)
- (04) x é maior que 27. (*sentença aberta*)
- (05) Três mais dois. (*expressão*)
- (06) Paris é a capital da França. (*sentença fechada*)

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

Lógica é o estudo dos princípios e métodos usados para distinguir sentenças verdadeiras de falsas.

Proposição: uma proposição é uma construção (declaração) que é verdadeira ou falsa.

Exemplos de proposições:

- Quatro é maior do que cinco.
- Ela é muito inteligente.
- São Paulo é uma cidade grande.
- A lua é feita de queijo mineiro.

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

Proposição: Uma sentença fechada que permite um dos julgamentos *falso* ou *verdadeiro*.

Proposição: é uma sentença declarativa afirmativa da qual tenha sentido afirmar que seja *verdadeira* ou que seja *falsa*.

Princípio da não contradição: Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

Princípio do terceiro excluído: Uma proposição é verdadeira ou falsa.

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

Exemplos de proposições:

- 1) $5 = 3 + 1$; (F)
- 2) o número 21 é ímpar; (V)
- 3) o inteiro 3 é menor que o inteiro 5; (V)
- 4) $5 > 2$; (V)
- 5) 5 está compreendido entre 9 e 15; (F)
- 6) A Terra ilumina o Sol; (F)
- 7) 5 é par e 7 é primo; (F).
- 8) 5 é par ou 7 é primo; (V).

O julgamento F ou V atribuído à proposição é denominado *valor lógico* da proposição.

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

Se “P” é uma proposição indicaremos $V(P)$ o valor lógico da proposição “P”.

Assim,

$V(P) = V$ se P for verdadeira ou

$V(P) = F$ se P for falsa.

Exemplos: (1) P: O sol é um astro;

(2) q: A lua é um satélite da Terra;

(3) r: $3 + 4 > 12$.

$V(P) = V$, $V(q) = V$, $V(r) = F$.

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

As proposições podem ser simples (**atômicas**) ou **compostas**.

Proposição Atômica: é uma proposição que não pode ser decomposta em proposições mais simples.

Proposição Composta: é uma proposição composta por duas ou mais proposições simples.

Conectivos Lógicos: são conectivos que têm a função de combinar sentenças simples para formar sentenças compostas.

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

As proposições simples são representadas por letras latinas *minúsculas*.

Exemplos:

- (1) p: eu sou estudioso;
- (2) q: Maria é bonita;
- (3) r: $3 + 4 + 5 > 12$.

As proposições compostas são representadas por letras latinas *maiúsculas*.

Exemplos:

- (4) P: Paulo é estudioso e Maria é bonita.
- (5) Q: Maria é bonita ou estudiosa.
- (6) R: Se $x = 2$ então $x^2 + 1 = 5$.

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

Negação: A negação de uma proposição é construída a partir da introdução da palavra *não*.

Exemplo: p : O Brasil é um país.

$\sim p$: O Brasil *não* é um país.

q : quatro é maior do que cinco.

$\sim q$: quatro *não* é maior do que cinco.

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

Considerando que P denota uma proposição, então sua negação é denotada por: $\sim P$ ou $\neg P$

Interpretamos a negação da seguinte forma:

se P é verdadeira, então $\neg P$ é falsa;

se P é falsa, então $\neg P$ é verdadeira.

Para visualizar os valores lógicos de um conectivo utilizamos a tabela-verdade:

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

P	$\neg P$
V	F
F	V

Conjunção: “e” - simbolizado por “ \wedge ”.

Considere as proposições simples:

p: Chove;

q: faz frio.

A proposição composta P formada a partir do conectivo \wedge é:

P: $p \wedge q$ que significa “chove e faz frio”.

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

Conjunção: Uma conjunção é verdadeira se *ambos* seus conjuntos são verdadeiros. Caso contrário, é falsa. É denotada por:

$$P \wedge Q \quad (P \text{ e } Q)$$

A tabela-verdade da conjunção:

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

Disjunção:

Na língua portuguesa há uma ambiguidade envolvida no uso do "ou". A proposição "*Obterei grau de mestre ou grau de doutor*" indica que quem o afirma pode obter ambos, o grau de mestre e o de doutor.

Mas em outra proposição, "*Me casarei com Livia ou Lúcia*", a palavra "ou" significa que apenas uma das duas moças será escolhida.

Na matemática e na lógica, não podemos permitir ambiguidades. Portanto, devemos nos decidir sobre o significado da palavra "ou".

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

Disjunção: (“ou”), símbolo \vee

Dadas duas proposições quaisquer \mathbf{p} e \mathbf{q} , a disjunção dessas proposições será a proposição composta “ \mathbf{p} ou \mathbf{q} ”, denotada por $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$, que será verdadeira quando, pelo menos uma das proposições \mathbf{p} ou \mathbf{q} for verdadeira.

A disjunção só será falsa quando ambas as proposições forem falsas.

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

Disjunção: Uma disjunção é verdadeira se *por pelo menos um* dos seus conjuntos é verdadeiro. Caso contrário, é falsa. É denotada por:

$$P \vee Q \quad (P \text{ ou } Q)$$

A tabela-verdade da conjunção:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

Exemplos:

1) Paris é a capital da França ou $1 + 2 = 7$

p: Paris é a capital da França (V)

q: $1 + 2 = 7$ (F)

$p \vee q$: Paris é a capital da França ou $1 + 2 = 7$ (V)

2) 9 é um número primo ou 16 é múltiplo de 4

p: 9 é um número primo (F)

q: 16 é múltiplo de 4 (V)

$p \vee q$: 9 é um número primo ou 16 é múltiplo de 4 (V)

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

Façamos as tabelas verdades de $P \vee Q$ e $\sim(\sim P \wedge \sim Q)$.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

$\sim P$	$\sim Q$	$\sim P \wedge \sim Q$	$\sim(\sim P \wedge \sim Q)$
F	F	F	V
F	V	F	V
V	F	F	V
V	V	V	F

Notamos que em cada caso a última coluna é VVVF. Observem que estas duas proposições têm os mesmos valores verdade em cada uma das quatro possibilidades.

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

Quando duas proposições P e Q têm os mesmos valores verdade em cada uma das possibilidades lógicas, dizemos que elas são simplesmente equivalentes ou logicamente equivalentes, e escrevemos $P \equiv Q$.

Duas proposições são logicamente equivalentes desde que tenham a mesma tabela verdade.

$$P \vee Q \equiv \sim(\sim P \wedge \sim Q)$$

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

Condicional se ... então ...

A **condicional se p então q** é outra proposição que tem como valor lógico **F se p é verdadeira e q é falsa**. O símbolo **$p \rightarrow q$** representa a condicional.

Exemplo:

$$P: 7 + 2 = 9$$

$$Q: 9 - 7 = 2$$

$$P \rightarrow Q: \text{Se } 7 + 2 = 9 \text{ então } 9 - 7 = 2$$

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

P: 7 + 5 < 4

Q: 2 é um número primo

$P \rightarrow Q$: **Se** 7 + 5 < 4 **então** 2 é um número primo.

P	Q	$P \rightarrow Q$
F	V	V

P: 24 é múltiplo de 3

Q: 3 é par

$P \rightarrow Q$: **Se** 24 é múltiplo de 3 **então** 3 é par.

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	F	F

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

P: 25 é múltiplo de 2

Q: $12 < 3$

$P \rightarrow Q$: Se 25 é múltiplo de 2 **então** $12 < 3$.

P	Q	$P \rightarrow Q$
F	F	V

A tabela verdade da **condicional se p então q** é

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

Vamos rever esta situação lógica por meio da seguinte situação:

Se fizer sol amanhã, então vamos a praia.

Existem quatro possibilidades:

- 1) Faz sol e vamos a praia.
- 2) Faz sol e não vamos a praia.
- 3) Não faz sol e vamos a praia.
- 4) Não faz sol e não vamos a praia.

Em qual dessas possibilidades a situação foi descumprida?

Resposta: a possibilidade 2.

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

	p	q	$p \rightarrow q$
Possibilidades	Se fizer sol <u>amanhã</u>	<u>então</u> vamos <u>a praia</u>	Se fizer sol <u>amanhã</u> , então <u>vamos a praia</u>
<u>1</u>	V	V	V
<u>2</u>	V	F	F
<u>3</u>	F	V	V
<u>4</u>	F	F	V

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

Vejamos outro exemplo.

Se hoje chover, então vou ficar em casa.

Existem quatro possibilidades:

- 1) Choveu e eu fiquei em casa.
- 2) Choveu e eu não fiquei em casa.
- 3) Não choveu e eu fiquei em casa.
- 4) Não choveu e eu não fiquei em casa.

Em qual dessas possibilidades a situação foi descumprida?

Resposta: a possibilidade 2.

Matemática I

Módulo V – Introdução à Lógica Matemática

	p	q	$p \rightarrow q$
Possibilidades	Se hoje <u>chover</u>	<u>então</u> vou <u>ficar</u> em casa	Se hoje chover, <u>então</u> <u>vou</u> ficar em casa
<u>1</u>	V	V	V
<u>2</u>	V	F	F
<u>3</u>	F	V	V
<u>4</u>	F	F	V

Em seu benefício

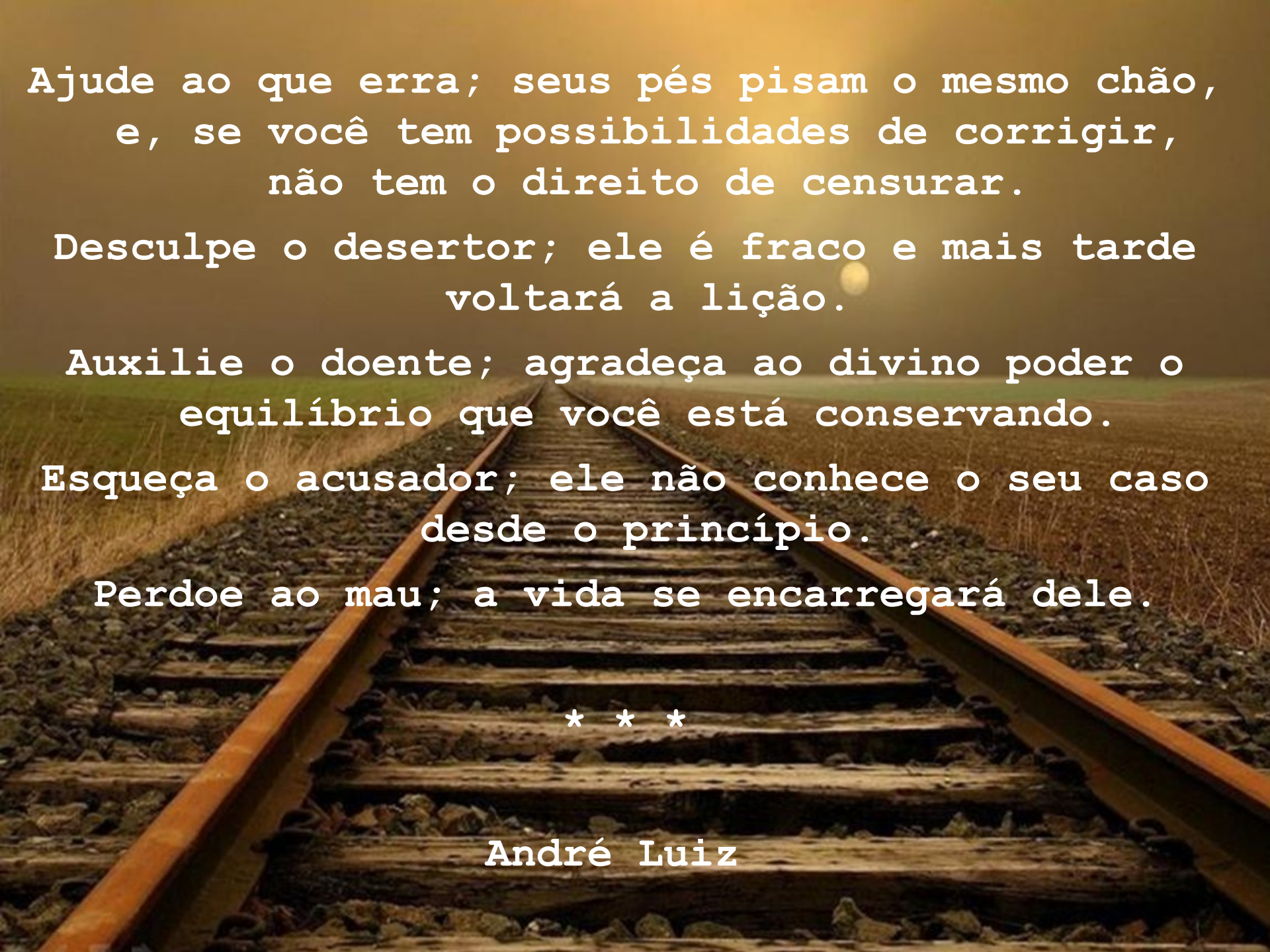
Não se agaste com o ignorante; certamente, não dispõe ele das oportunidades que iluminaram seu caminho.

Evite aborrecimento com as pessoas fanatizadas; permanecem no cárcere do exclusivismo e merecem compaixão como qualquer prisioneiro.

Não se perturbe com o malcriado; o irmão intratável tem, na maioria das vezes, o fígado estragado e os nervos doentes.

Ampare o companheiro inseguro; talvez não possua o necessário, quando você detém excessos.

Não se zangue com o ingrato; provavelmente, é desorientado ou inexperiente.



Ajude ao que erra; seus pés pisam o mesmo chão,
e, se você tem possibilidades de corrigir,
não tem o direito de censurar.

Desculpe o desertor; ele é fraco e mais tarde
voltará a lição.

Auxilie o doente; agradeça ao divino poder o
equilíbrio que você está conservando.

Esqueça o acusador; ele não conhece o seu caso
desde o princípio.

Perdoe ao mau; a vida se encarregará dele.

* * *

André Luiz