Matemática I

Bacharelado em Sistemas de Informação

Período 2011.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Matemática I

E-mails:

damasceno12@hotmail.com
damasceno12@uol.com.br
damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info
damasceno.info

Matemática I

Módulo IV – Contagem. Permutação

Solução de problemas que se baseia no princípio multiplicativo, também chamado de princípio fundamental da contagem.

Matemática I

Módulo IV – Contagem. Permutação

Uma pessoa mora em Nova Iguaçu e trabalha em Copacabana. Ela vai trabalhar todos os dias usando apenas transporte coletivo. Esta pessoa vai de Nova Iguaçu ao Centro do Rio tomando ônibus, van ou trem. Do Centro do Rio, pode ir a Copacabana de ônibus, van ou metrô. Levando em conta apenas estas possibilidades, de quantas maneiras ela poderá ir de casa ao trabalho?

Neste caso podemos contar facilmente todas as 9 possibilidades:

$\{(V, V), (V,O), (V,M), (O, V), (O,O), (O,M), (T, V), (T,O), (T,M)\}$,

Matemática I

Módulo IV – Contagem. Permutação

Suponha que existam $N1$ maneiras de se realizar uma tarefa $T1$ e $N2$ maneiras de se realizar uma tarefa $T2$. Então há $N1 \times N2$ maneiras de se realizar a tarefa $T1$ seguida da tarefa $T2$.

Na discussão acima, $T1$ é a tarefa de ir de Nova Iguaçu ao Centro do Rio e $N1 = 3$ (há 3 possibilidades de se fazer isto). Da mesma forma, $T2$ é a tarefa de ir do Centro do Rio a Copacabana, e há $N2 = 3$ possibilidades de se realizar esta tarefa. No total, há:

$$N1 \times N2 = 3 \times 3 = 9 \text{ possibilidades}$$

Matemática I

Módulo IV – Contagem. Permutação

Exemplo

Um aluno se prepara para ingressar no ensino superior. Ele pode escolher entre 10 universidades. Se cada uma delas tiver 15 cursos, quantas possibilidades de cursos há para este aluno?

Solução:

$$10 \times 15 = 150 \text{ cursos diferentes.}$$

Princípio da Multiplicação Generalizado.

Se uma tarefa $T1$ pode ser feita de $N1$ maneiras, uma tarefa $T2$ de $N2$ maneiras, ..., uma tarefa Tn de Nn maneiras, então o número de maneiras de realizar $T1$, $T2$, . . . , Tn, em sequência, é $N1 \times N2 \times \ldots \times Nn$ $(n \geq 1)$.

Matemática I

Módulo IV – Contagem. Permutação

Exemplo

Um restaurante oferece 4 tipos de entrada, 10 pratos principais e 5 tipos de sobremesa. Se um freguês deste restaurante decide tentar uma refeição diferente a cada noite, quanto tempo levará para esgotar todas as possibilidades?

Solução: Quantas combinações de pratos há no total?

São 4 tipos de entrada, 10 pratos principais e 5 possibilidades de sobremesa. Portanto, o total de possibilidades é:

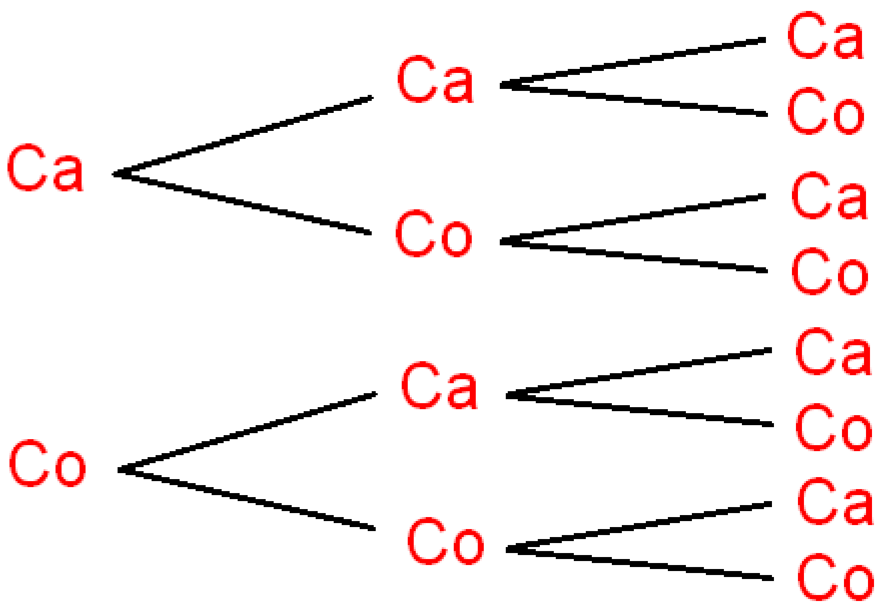
$$4 \times 10 \times 5 = 200 .$$

Módulo IV – Contagem. Permutação

Exemplo

Em um jogo de “cara ou coroa”, uma moeda é lançada 3 vezes. Qual o número de resultados possíveis?

Solução:



Como foi lançada 3 vezes, há $2 \times 2 \times 2 = 8$ resultados possíveis.

Matemática I

Módulo IV – Contagem. Permutação

Exemplo

Alguns cadeados usam anéis rotativos numéricos, em vez de chave. Existe um número que deve ser selecionado nos anéis numéricos para abrir o cadeado. Vamos chamar este número de *chave numérica*. Suponha que um tal cadeado trabalha com números de 5 dígitos. Quantas possibilidades de chave numérica existem?

Solução:

As chaves são números de 5 dígitos. Para cada dígito, temos 10 possibilidades, que são os algarismos 0, 1, 2, 3, . . . , 9. Portanto, temos

10.10.10.10.10 = 105 = 100000 possibilidades de chave.

Matemática I

Módulo IV – Contagem. Permutação

Exemplo

Um pai quer tirar uma fotografia de seus 3 filhos. Quantas fotos ele terá que tirar para atender a todas as ordens possíveis?

Solução:

Considere 3 posições de ocupação e sejam A, B e C os filhos. De quantas maneiras podemos ocupar a primeira posição?

A___ ___ B ___ ___ C ___ ___

Como são 3 filhos temos 3 posições. Para cada primeira posição ocupada quantas possibilidades existem para ocupar a segunda posição? Temos, portanto, 2 posições.

Matemática I

Módulo IV – Contagem. Permutação

A B __ B A __ C A __
A C __ B C __ C B __

Para cada duas primeiras posições ocupadas quantas possibilidades existem para ocupar a tercera posição? Temos apenas 1 posição.

A B C B A C C A B

Pelo princípio da multiplicação temos:

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

Matemática I

Módulo IV – Contagem. Permutação

Se os garotos se chamam André (A), João (J) e Pedro (P) é fácil listar todas as ordenações possíveis. Elas são as seguintes:

AJP APJ JAP JPA PAJ PJA

$3 \times 2 \times 1 = 3! = 6$

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2 \times 1 = 2$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

....

$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

Módulo IV – Contagem. Permutação

Chamaremos de $P(n)$ ao número de permutações de um conjunto de n elementos.

O número de permutações de um conjunto de n elementos é:

$$P(n) = n!$$

Exemplo

Qual o número de resultados possíveis em uma corrida de carros, onde 6 deles competem e todos chegam ao final?

Solução:

Cada resultado possível corresponde a uma permutação do conjunto de 6 carros. O número total de permutações é:

$$6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$$

Matemática I

Módulo IV – Contagem. Arranjos

Em uma classe de 10 alunos, deve-se escolher um representante e seu suplente. De quantas maneiras isto pode ser feito?

Temos 10 possibilidades para a primeira posição. Uma vez feita a escolha, restam 9 alunos, que são as 9 possibilidades para a segunda posição.
Portanto, são:

$$10 \times 9 = 90$$

Matemática I

Módulo IV – Contagem. Arranjos

Em uma reunião de condomínio onde 10 moradores estão presentes, deve-se escolher, entre eles, um síndico, um subsíndico, um secretário e um tesoureiro. De quantas maneiras isto pode ser feito?

Este problema é o de selecionar, em ordem, 4 pessoas dentro de um conjunto de 10 pessoas. Este número é:

$$A(10, 4) = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$$

Portanto, são 5040 possibilidades.

Módulo IV – Contagem. Arranjos

Um empregador tem 3 tarefas distintas que deve distribuir para 6 empregados. De quantas maneiras pode fazer isto, se cada empregado pode realizar apenas uma tarefa e cada tarefa deve ser dada a apenas um empregado?

Trata-se de escolher 3 empregados para dar as 3 tarefas. A ordem da escolha é importante porque as tarefas são distintas. Se as tarefas são $T1$, $T2$ e $T3$, então podemos dar a tarefa $T1$ ao primeiro empregado selecionado, a tarefa $T2$ ao segundo empregado e a tarefa $T3$ ao terceiro empregado selecionado.

Módulo IV – Contagem. Arranjos

O número de soluções é, portanto, o número de arranjos de 6 elementos, tomados 3 a 3. Portanto, são:

$$A(6, 3) = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

Em muitos problemas devemos determinar o número de maneiras de selecionar r objetos em uma certa ordem dentro de um conjunto de n objetos distintos, onde $n \geq r$.

Em geral, se devemos selecionar, em alguma ordem, r objetos de um conjunto de n objetos ($n \geq r$) distintos, temos:

Matemática I

Módulo IV – Contagem. Arranjos

n maneiras de preencher a primeira posição, seguido de $n-1$ maneiras de preencher a segunda posição, seguido de $n-2$ maneiras de preencher a terceira posição, e assim por diante.

Para a r−ésima posição, teremos

$$n - r + 1 \text{ possibilidades de preenchimento.}$$

Portanto

$$A(n, r) = n\,(n - 1)(n - 2) \times \ldots \times (n - r + 1)$$

Módulo IV – Contagem. Arranjos

Observe que:

para $r = 1$ temos $n - r + 1 = n - 1 + 1 = n$

para $r = 2$ temos $n - r + 1 = n - 2 + 1 = n - 1$

para $r = 3$ temos $n - r + 1 = n - 3 + 1 = n - 2$

isto é,

$A(n, 1) = n$

$A(n, 2) = n\,(n - 1)$

$A(n, 3) = n\,(n - 1)\,(n - 2)$

Matemática I

Módulo IV – Contagem. Arranjos

$$A(n,r) = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times (n-r+1)$$

Como

$$n(n-1)(n-2) \times \ldots \times (n-r+1) =$$

$$\frac{n(n-1)(n-2) \times \ldots \times (n-r+1) \times (n-r)!}{(n-r)!}$$

temos que

$$A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Módulo IV – Contagem. Arranjos

Observe que

$$P(n) = A(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{(0)!} = n!$$

isto é,

$$(0)! = 1$$

Matemática I

Módulo IV – Contagem. Arranjos

O prefeito de uma cidade está trabalhando com sua equipe, decidindo as metas de sua administração. Seus assessores lhe apresentaram uma lista de 30 metas, dividas em 3 grupos:
12 metas de curto prazo;
10 metas de médio prazo;
8 metas de longo prazo.
O prefeito então ordena que seus assessores escolham 5 metas de cada grupo, em uma ordem de prioridade em cada grupo. De quantas maneiras isto pode ser feito?

Módulo IV – Contagem. Arranjos

A escolha das 5 metas de curto prazo pode ser feita de:

$$A(12,5) = \frac{12!}{(12-5)!} = \frac{12!}{7!} = 95040 \qquad \text{maneiras}$$

A escolha das 5 metas de médio prazo pode ser feita de:

$$A(10,5) = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!} = 30240 \qquad \text{maneiras}$$

A escolha das 5 metas de curto prazo pode ser feita de:

$$A(8,5) = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!} = 6720 \qquad \text{maneiras}$$

Módulo IV – Contagem. Combinações

Considere-se o seguinte exemplo:

Um aluno deseja comprar 4 livros diferentes, mas de igual custo, e só tem dinheiro para comprar 3 desses livros. De quantos modos pode o aluno fazer a escolha de 3 livros de entre os 4 que deseja?

Representando os livros pelas letras A, B, C, D as escolhas de compra possíveis são:

ABC, ABD, ACD, BCD

Módulo IV – Contagem. Combinações

Se permutarmos A, B, C e D em cada combinação

ABC, ABD, ACD, BCD obtemos

ABC, ABD, ACD, BCD
ACB, ADB, ADC, BDC
BCA, BDA, CDA, CBD
BAC, BAD, CAD, CDB
CAB, DAB, DAC, DBC
CBA, DBA, DCA, DCB

Módulo IV – Contagem. Combinações

Portanto,

$$A(n,p) = C(n,p) \times P(p)$$

Logo

$$C(n,p) = \frac{A(n,p)}{P(p)} = \frac{\dfrac{m!}{(m-p)!}}{p!}$$

$$C(n,p) = \frac{m!}{(m-p)!} \times \frac{1}{p!} = \frac{m!}{p!(m-p)!}$$

Matemática I

Módulo IV – Contagem. Combinações

Exemplo: Um grupo de 5 pessoas precisa escolher 2 delas para formar uma comissão. Quantas escolhas são possíveis?

$$C(5,2)=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{2!\times 3!}=\frac{5\times 4}{2\times 1}=10$$

A B C D E

AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE

Matemática I

Módulo IV – Contagem. Combinações

Exemplo: Um técnico convocou 12 jogadores para um time de basquete. Para armar o time que vai começar o jogo, deve selecionar 5 jogadores. De quantas maneiras pode fazê-lo?

O número de combinações de 12 jogadores, tomados 5 a 5, é

$$C(12,5) = \frac{12!}{5!(12-5)!} = \frac{12!}{5! \times 7!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 7!} = 792$$

Módulo IV – Contagem. Combinações

Exemplo: Uma turma possui 5 alunos e 6 alunas. Uma comissão deve ser formada entre todos os alunos, devendo ter 2 meninos e 2 meninas. Quantas comissões podem ser formadas?

Podemos dividir a seleção de uma comissão em duas etapas:

1. Escolher 2 alunos de um conjunto de 5 alunos.
2. Escolher 2 alunas de um conjunto de 6 alunas.

Módulo IV – Contagem. Combinações

A primeira tarefa pode ser feita de

$$C(5,2) = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5.4.3!}{3!.2} = 10 \quad \text{maneiras},$$

enquanto a segunda etapa pode ser feita de

$$C(6,2) = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6.5.4!}{4!.2} = 15 \quad \text{maneiras},$$

Pelo princípio multiplicativo, temos um total de

$$10 \times 15 = 150 \;\; \text{comissões possíveis.}$$

Se você quer transformar o mundo, experimente primeiro promover o seu aperfeiçoamento pessoal e realizar inovações no seu próprio interior. Estas atitudes se refletirão em mudanças positivas no seu ambiente familiar. Deste ponto em diante, as mudanças se expandirão em proporções cada vez maiores. Tudo o que fazemos produz efeito, causa algum impacto.(Dalai Lama).