Matemática I

Bacharelado em Sistemas de Informação

Período 2011.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Matemática I

Módulo II - Relações

Par ordenado: chamamos de par ordenado ao elemento (x,y) formado pelos elementos x,y.

Para localizar um ponto no plano, utilizamos dois números reais, numa certa ordem.

(3, 4) (-1, 7)

1º elemento 2º elemento coordenadas

Matemática I

Módulo II - Relações

De um modo geral, sendo x e y dois números reais quaisquer, temos: $(x,y) \neq (y, x)$.

Representação gráfica:

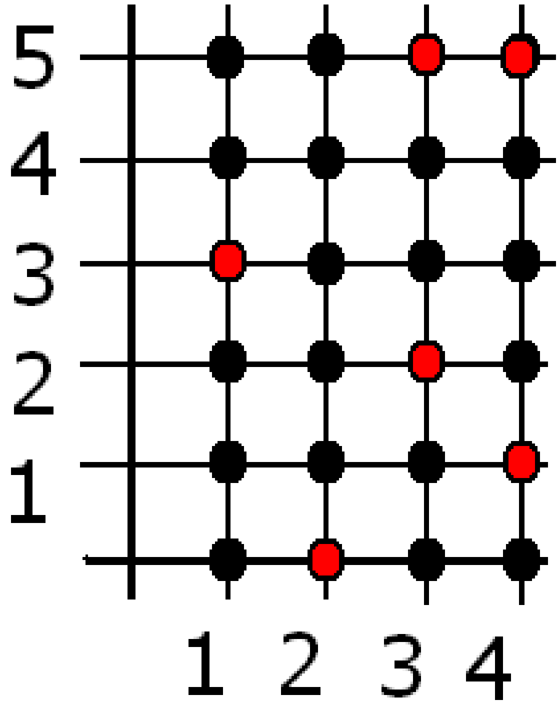
(3, 5), (4, 5)

(1, 3)

(3, 2)

(4, 1)

(2, 0)



Matemática I

Módulo II - Relações

Produto Cartesiano: Dados dois conjuntos A e B, não vazios, chamamos de produto cartesiano de A por B ao conjunto A X B, definido por:

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B \}$$

Exemplo 1: A = { 1, 2 } B = { 3, 5 }

A X B = { (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)}

Exemplo 2: A = { 1, 2 } B = { 3, 5, 7 }

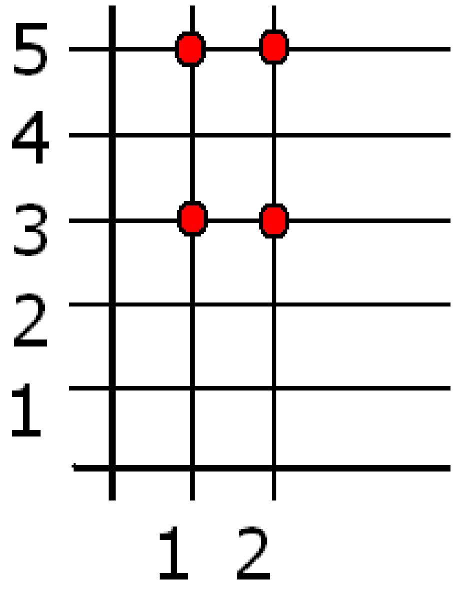
A X B = { (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 3), (2, 5), (2, 7)}

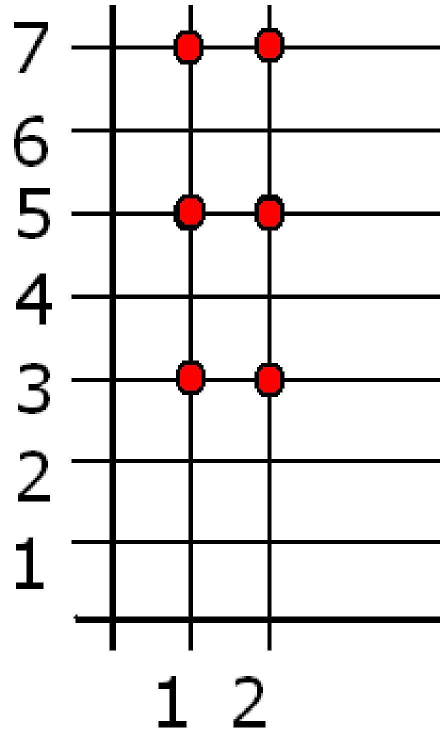
Matemática I

Módulo II – Relações. Representação gráfica

Ex. 1: A X B = { (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)}

Ex. 2: A X B = { (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 3), (2, 5), (2, 7)}





Matemática I

Módulo II – Relações

Dados dois conjuntos, A e B, não vazios, chamamos de relação binária R de A em B

qualquer subconjunto do produto cartesiano A X B

$$R \subset A \times B$$

O conjunto A é chamado de ***domínio*** de R.

O conjunto B é chamado de ***contradomínio*** de R.

Os elementos de A são representados por **x** e os elementos de B são representados por **y**.

O conjunto formado por todos os **y** pertencentes à relação chamamos de **imagem**.

Matemática I

Módulo II – Relações

Exemplo: $A = \{ 1, 2, 3 \}$ $B = \{ 4, 5, 6 \}$

$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), \ldots (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

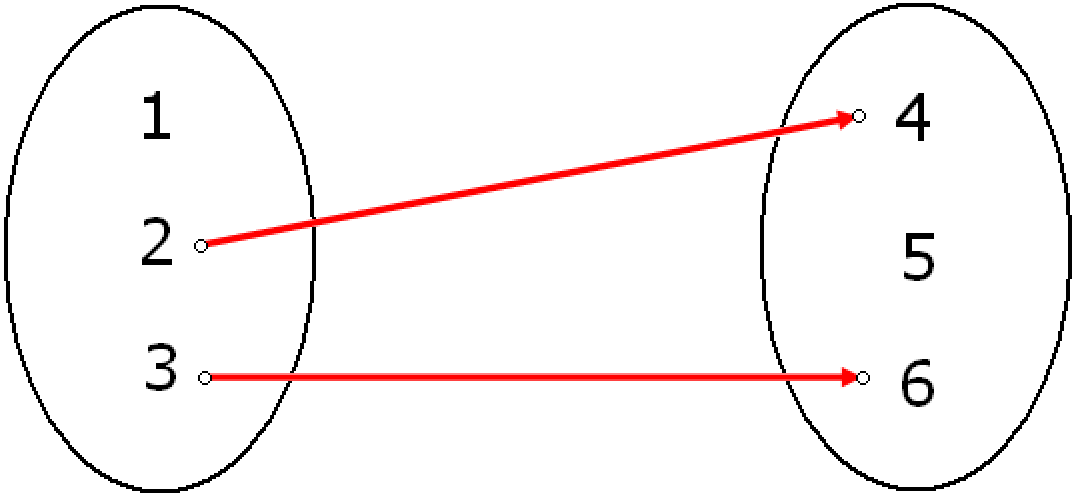
$R = \{ (x, y) \in A \times B \mid y = 2x \}$, i. é.,

$R = \{ (2, 4), (3, 6) \}$

$D(R) = \{1, 2, 3\}$

$CD(R) = \{4, 5, 6\}$

$Im(R) = \{4, 6\}$



Matemática I

Módulo II – Relações

Exemplo: $A = \{ 1, 2, 3 \}$ $\qquad$ $B = \{ 4, 5, 6 \}$

$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), \ldots (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

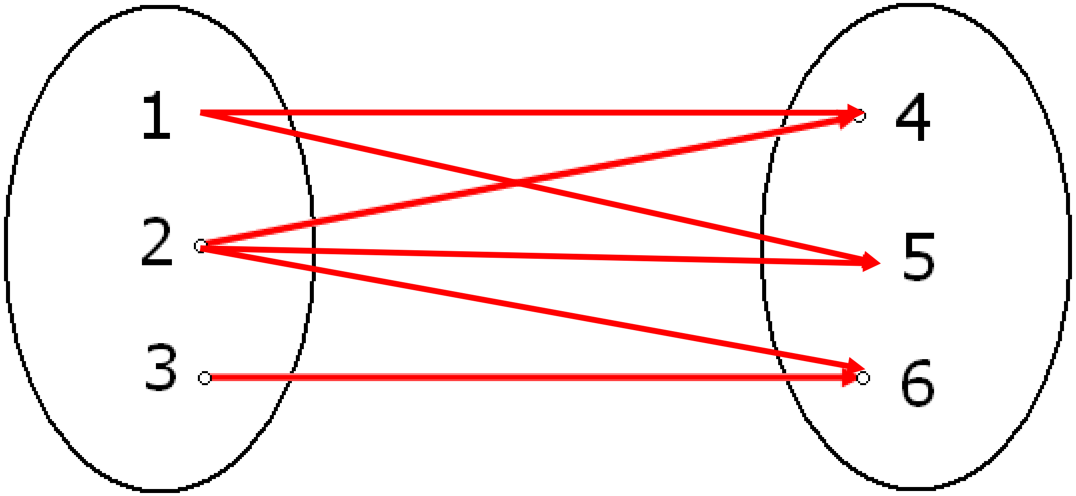
$R = \{ (x, y) \in A \times B \mid y = 2x \}$, i. é.,

$R = \{ (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 6) \}$

$D(R) = \{1, 2, 3\}$

$CD(R) = \{4, 5, 6\}$

$Im(R) = \{4, 5, 6\}$



Matemática I

Módulo II – Relações. Relação inversa.

Seja R uma relação de A em B. A relação inversa de R, denotada por R^{-1}, é definida de B em A por:

$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$

Exemplos:

$R = A \times B = \{ (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\}$

$R^{-1} = B \times A = \{ (3, 1), (5, 1), (3, 2), (5, 2)\}$

$R = \{ (2, 4), (3, 6) \}$

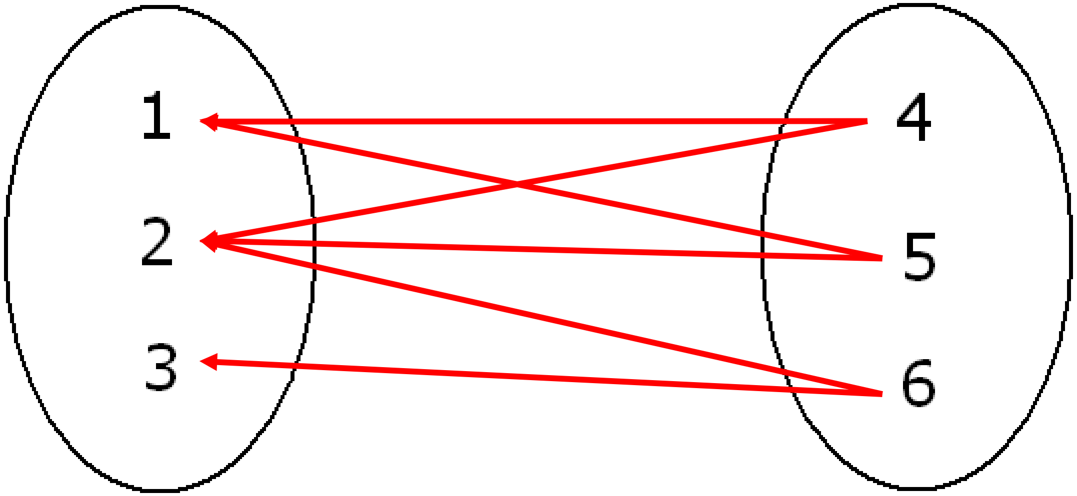
$R^{-1} = \{ (4, 2), (6, 3) \}$

Matemática I

Módulo II – Relações. Relação inversa.

$R = \{ (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 6) \}$

$R^{-1} = \{ (4, 1), (5, 1), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (6, 3) \}$



Matemática I

Módulo II – Relações. Matriz de uma relação.

Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios tais que n(A) = m e n(B) = n.

Qualquer relação $R : A \to B$ pode ser representada como uma matriz do seguinte modo:

$M[i,j] = 1$ se, e somente se, $(ai, bj) \in R$;

$M[i,j] = 0$ se, e somente se, $(ai, bj) \notin R$;

Módulo II – Relações. Matriz de uma relação.

Exemplo

$Seja\ A = \{1, 2, 3\},$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}\ e\ R \subseteq A \times B,$

$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 4), (3, 5)\}\ \ Então,$

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	0
2	0	1	0	0	0
3	0	0	0	1	1

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matemática I

Módulo II – Relações. Matriz de uma relação.

Dado os conjuntos A = {a}, B = {a,b} e C = {0,1,2}, temos:

a) $R = \{(x, y) \in B \times B \mid x = y\}$

=	a	b
a	1	0
b	0	1

Matemática I

Módulo II – Relações. Matriz de uma relação.

Dado os conjuntos A = {a}, B = {a,b} e C = {0,1,2}, temos:

b) $R = \{(x, y) \in C \times C \mid x < y\}$

<	0	1	2
0	0	1	1
1	0	0	1
2	0	0	0

c) R = A X B

AXB	a	b
a	1	1

Matemática I

Módulo II – Relações. Propriedades.

Reflexiva: Uma relação $R : A \to A$ é reflexiva se todo elemento de A está relacionado consigo mesmo;

para todo $x \in A$: $(x,x) \in R$.

Exemplo: $A = \{a, b, c\}$

$R = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$

$R = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a^2 = b^2\}$. Como $a^2 = a^2$, para todo $a \in \mathbb{R}$, é reflexiva.

Matemática I

Módulo II – Relações. Propriedades.

<u>Exemplo</u>: Sejam as relações sobre o conjunto $S = \{1,2,3,4\}$

$R1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$

$R2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$

$R3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$

$R4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

$R5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$

$R6 = \{(3,4)\}$

As relações R3 e R5 são Reflexivas, as demais não

Matemática I

Módulo II – Relações. Propriedades.

<u>Exemplo</u>: Sejam as relações sobre o conjunto dos inteiros

$R1 = \{(a,b) \mid a \leq b\}$

$R2 = \{(a,b) \mid a > b\}$

$R3 = \{(a,b) \mid a = b \text{ ou } a = -b\}$

$R4 = \{(a,b) \mid a = b\}$

$R5 = \{(a,b) \mid a = b + 1\}$

$R6 = \{(a,b) \mid a + b \leq 3\}$

As relações R1, R3 e R4 são Reflexivas

Módulo II – Relações. Propriedades.

Exemplo:

Seja A o conjunto dos números reais e E uma relação em A definida por:

$$x \, E \, y \Leftrightarrow x - y = 5$$

Observe que, $6 \, E \, 1$, $8 \, E \, 3$ etc. mas x não está relacionado com x, já que $x - x = 0 \neq 5$. Logo, a relação E **não** é reflexiva.

Matemática I

Módulo II – Relações. Propriedades.

Simétrica: Uma relação $R : A \rightarrow A$ é simétrica se $x \; R \; y$, implicar necessariamente que $y \; R \; x$;

Se $x \; R \; y \Rightarrow (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R \Rightarrow y \; R \; x$.

Exemplo: $A = \{a, b, c\}$

$R = \{(a, a), (a, b), (b, a)\}$

A = {conjunto dos seres humanos}

$R = \{(x, y) \in A \times A \mid x \text{ é irmão de } y\}$

Matemática I

Módulo II – Relações. Propriedades.

R é simétrica, pois se x é irmão de y, então y é irmão de x.

A = conjunto dos números reais;

R = {(x, y) | $x^2 = y$} não é simétrica pois, $2^2 = 4$, mas $4^2 \neq 2$.

R = {(x, y) | y = 2x} não é simétrica pois, $6 = 2 \times 3$, mas $3 \neq 2 \times 6$.

Matemática I

Módulo II – Relações. Propriedades.

Exemplo: Sejam as relações sobre o conjunto $S = \{1,2,3,4\}$

$R1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$

$R2 = \{(1,1), (1,2),(2,1)\}$

$R3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$

$R4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

$R5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$

$R6 = \{(3,4)\}$

As relações R2 e R3 do Exemplo acima são Simétricas

Matemática I

Módulo II – Relações. Propriedades.

Transitiva: Uma relação $R : A \to A$ é transitiva, se $x\ R\ y$ e $y\ R\ z$, implicar que $x\ R\ z$;

Se $x\ R\ y$ e $y\ R\ z \Rightarrow (x, y), (y, z) \in R$

$\Rightarrow (x, z) \in R \Rightarrow x\ R\ z$.

Exemplo: $A = \{a, b, c\}$

$R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (a, c)\}$

Matemática I

Módulo II – Relações. Propriedades.

Ex.: Sejam as relações definidas nos conjuntos indicados. Qual delas é uma relação transitiva?

(a) $R = \{(2, 6), (6, 8), (8, 2)\}$, conjunto $A = \{2, 6, 8\}$.

(b) $R = \{(1, 3), (3, 4), (1, 2)\}$, conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

(c) $R = \{(1, 3), (3, 5), (1, 5)\}$, conjunto $A = \{1, 3, 5\}$.

(d) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$, conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.

(e) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$, conjunto $A = \{1, 2, 3\}$.

Módulo II – Relações. Propriedades.

Ex.: Seja $R = \{(x, y) \mid x = y;\ x, y \text{ naturais}\}$. Então R é uma relação transitiva, pois

se $x = y$ e $y = z$ então $x = z$

Ex.: Seja $R = \{(x, y) \mid x < y;\ x, y \text{ naturais}\}$. Então R é uma relação transitiva, pois

se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$

Matemática I

Módulo II – Relações. Propriedades.

Exemplo: Sejam as relações sobre o conjunto dos inteiros

$R1 = \{(a,b) \mid a \leq b\}$

$R2 = \{(a,b) \mid a > b\}$

$R3 = \{(a,b) \mid a = b \text{ ou } a = -b\}$

$R4 = \{(a,b) \mid a = b\}$

$R5 = \{(a,b) \mid a = b + 1\}$

$R6 = \{(a,b) \mid a + b \leq 3\}$

As relações R1, R2, R3 e R4 do Exemplo acima são Transitivas

Matemática I

Módulo II – Relações. Propriedades.

Anti-simétrica: Sejam $x \in A$ e $y \in A$. Uma relação $R : A \to A$ é anti-simétrica se $(x,y) \in R$ e $(y,x) \in R$ implica que $x=y$.

Se $x\ R\ y$ e $y\ R\ x \Rightarrow (x, y), (y, x) \in R$

$\Rightarrow (x, x) \in R \Rightarrow x = y.$

Exemplo: $A = \{a, b, c\}$

$R = \{(a, a), (b, b), (a, b), (a, c)\}$

Matemática I

Módulo II – Relações. Propriedades.

Exemplo: Sejam as relações sobre o conjunto $S = \{1,2,3,4\}$

$R1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$

$R2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$

$R3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$

$R4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

$R5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$

$R6 = \{(3,4)\}$

As relações R4, R5 e R6 do exemplo são Anti-simétricas

Matemática I

Módulo II – Relações. Propriedades.

Exemplo: Sejam as relações sobre o conjunto dos inteiros

$R1 = \{(a,b) \mid a \le b\}$

$R2 = \{(a,b) \mid a > b\}$

$R3 = \{(a,b) \mid a = b \text{ ou } a = -b\}$

$R4 = \{(a,b) \mid a = b\}$

$R5 = \{(a,b) \mid a = b + 1\}$

$R6 = \{(a,b) \mid a + b \le 3\}$

As relações R1, R2, R4 e R5 do exemplo são Anti-simétricas

Matemática I

Módulo II – Relações. Propriedades.

Ex.: Defina uma relação no conjunto {1, 2, 3, 4} que seja:

a) reflexiva

b) simétrica

c) transitiva

d) reflexiva e simétrica

e) reflexiva, simétrica e transitiva.

Matemática I

Módulo II – Relações. Grafo da relação.

Uma relação definida de um conjunto A no próprio conjunto A é chamada **relação binária de A para A.**

Uma representação gráfica de uma relação binária onde o conjunto A é desenhado somente uma vez e uma seta é desenhada para cada par de pontos relacionados entre si é chamada de **GRAFO DIRIGIDO**

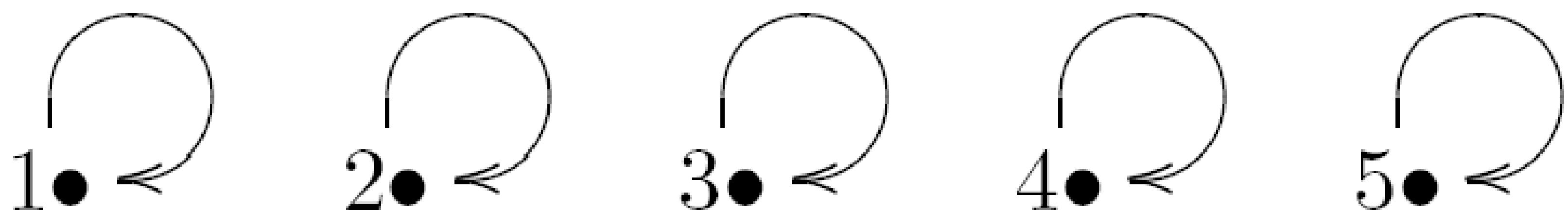
Exemplo: R = {(1; 1); (1; 3); (3; 1)}

Matemática I

Módulo II – Relações. Grafo da relação.

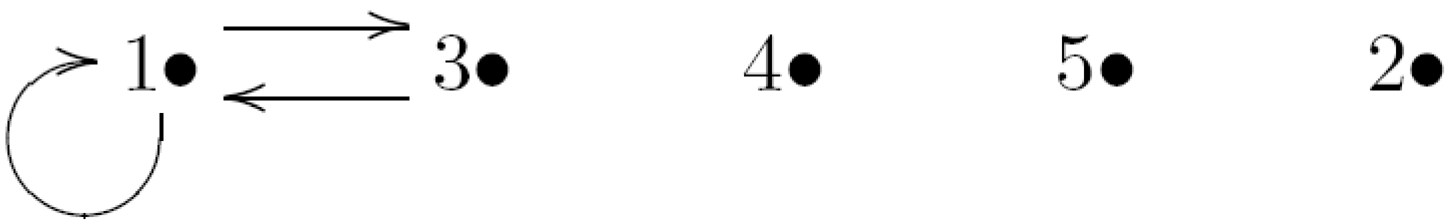
As relações em A podem ser representadas por grafos dirigidos os quais são constituídos por um conjunto de vértices (que representam os elementos de A) e um conjunto de ramos (que correspondem aos pares ordenados que pertencem a relação).

Exemplo: R = {(1; 1); (2; 2); (3; 3); (4; 4); (5; 5)}

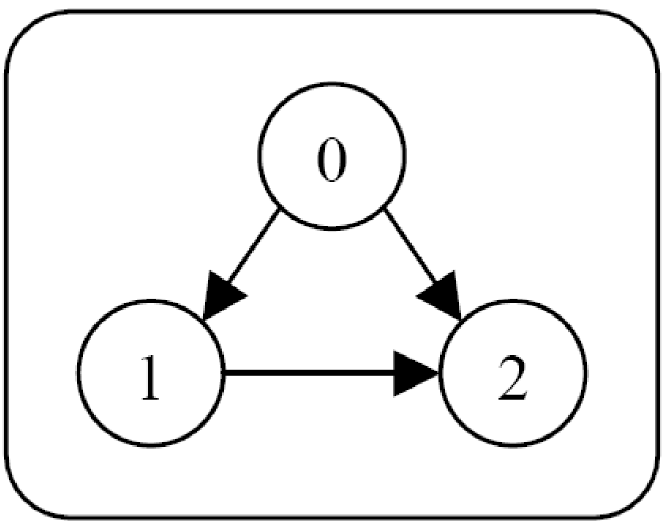


Módulo II – Relações. Grafo da relação.

Exemplo: R = {(1; 1); (1; 3); (3; 1)}



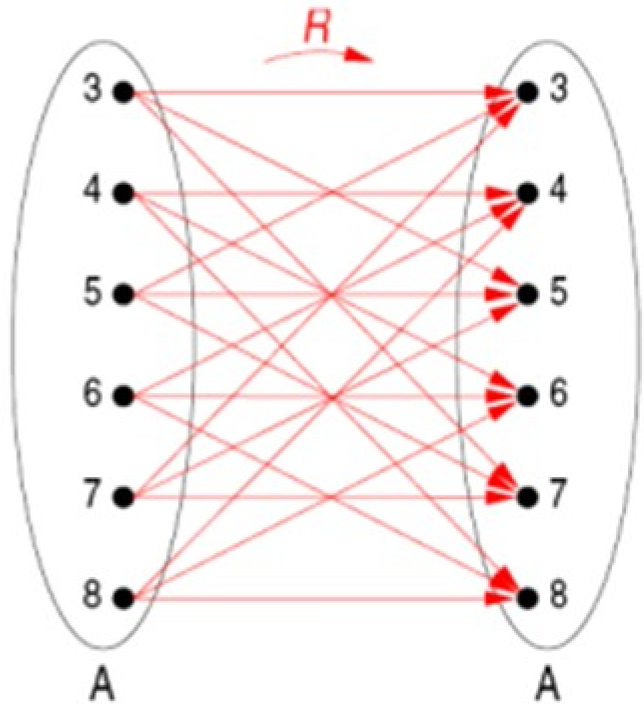
Exemplo: R = {(0; 1); (0; 2); (1; 2)}

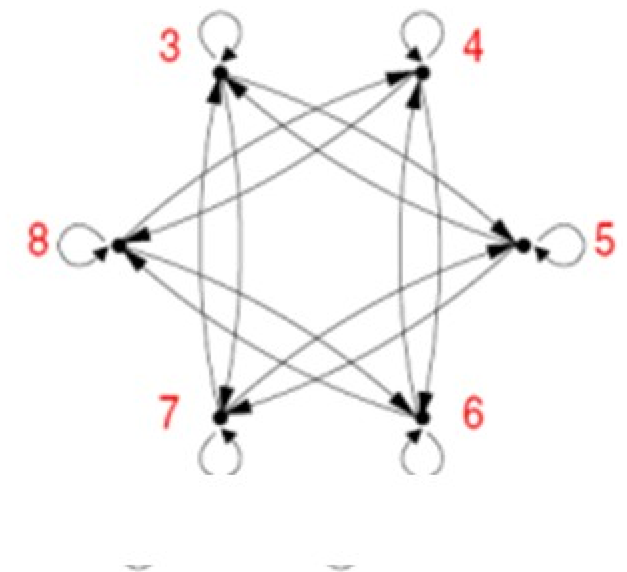


Matemática I

Módulo II – Relações. Grafo da relação.

Exemplo: Seja A = {3, 4, 5, 6, 7, 8} e a relação binária R definida por todos os pares ordenados (x, y) em que 2 divide a diferença x - y. Veja o diagrama da relação R e do seu grafo dirigido

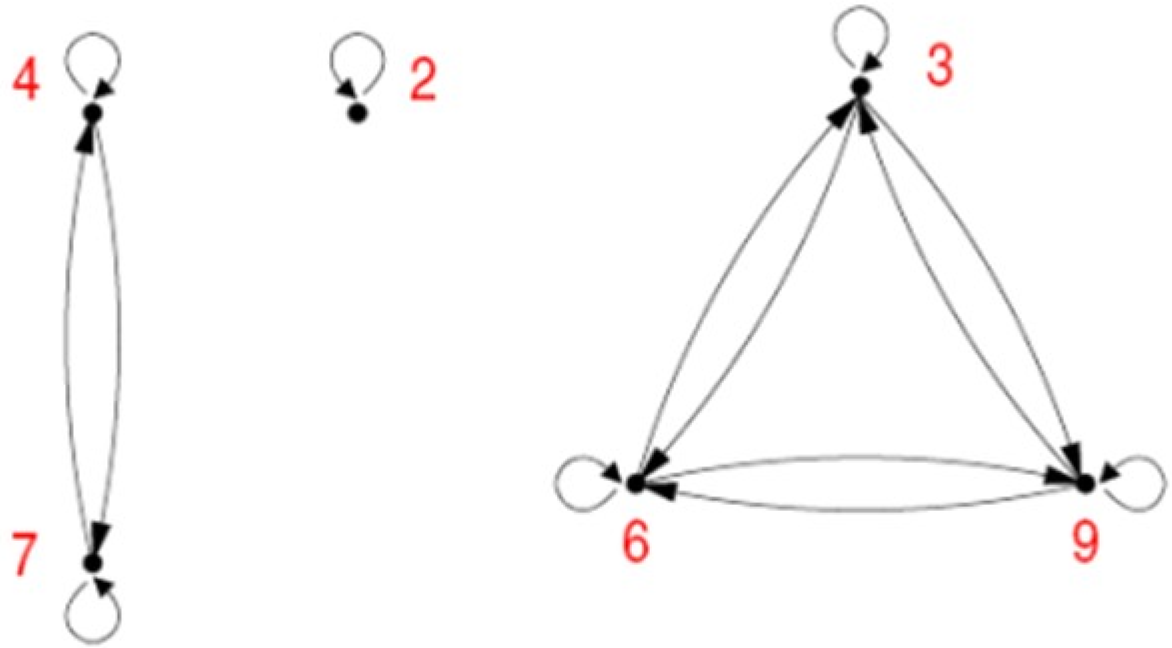




Matemática I

Módulo II – Relações. Grafo da relação.

Exemplo: Seja A = {2, 3, 4, 6, 7, 9} e a relação binária R definida por todos os pares ordenados (x, y) em que 3 divide a diferença x - y. Veja o diagrama da relação R e do seu grafo dirigido



O que queres que não podes ter?
Nesta frase tão curta, reside todo o emaranhado de fios que te sufocam a cada dia.
Começa por ti e em ti.
Aprende a conhecer tuas reais necessidades e começa por elas.
Uma a uma, purificando teu ser do sofrimento que tens te causado por todo este tempo.
Desacredita da tua má sorte e põe tua atenção, teu coração no conhecimento que está dentro de ti, em silêncio, a esperar-te para dar-te a paz,
a certeza de quem és (Dalai Lama).