Fundamentos de Matemática para Computação

Tecnologia em Rede de Computadores

Período 2012.1

Prof. da Disciplina

Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Fundamentos de Matemática para Computação

E-mails:

damasceno12@hotmail.com
damasceno12@uol.com.br
damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info
damasceno.info

Módulo IV – Contagem. Indução Matemática

O que é a *Indução Matemática*?

Você está subindo uma escada com infinitos batentes.

Como saber se será capaz de chegar a um degrau arbitrariamente alto?

Suponha as seguintes hipóteses:

1. Você consegue alcançar o primeiro degrau
2. Uma vez chegando a um degrau, você sempre é capaz de chegar ao próximo

Módulo IV – Contagem. Indução Matemática

Pela hipótese 1, você alcança o primeiro degrau;

Pela hipótese 2, você consegue chegar ao segundo;

novamente pela hipótese 2, chega ao terceiro degrau;

e assim sucessivamente.

Módulo IV – Contagem. Indução Matemática

Primeiro Princípio de Indução Matemática

Considere que $P(n)$ é uma propriedade definida para cada inteiro positivo n.

1. P(1) é verdadeira;
2. Para todo k, k inteiro positivo, se $P(k)$ é verdadeiro, então $P(k+1)$ é verdadeiro.

Desta forma provamos que P(n) é verdadeira para todo inteiro $n \geq 1$.

Fund. De Matemática para Comp

Módulo IV – Contagem. Indução Matemática

Exemplo: Suponha que um ancestral casou-se e teve dois filhos. Vamos chamar esses dois filhos de geração 1. Suponha agora que cada um desses filhos teve dois filhos. Então a geração 2 contém quatro descendentes. Imagine que esse processo continua de geração em geração.

A geração 1 possui 2 descendentes: $P(1) = 2^1$;

A geração 2 possui 4 descendentes: $P(2) = 2^2$;

A geração 3 possui 8 descendentes: $P(3) = 2^3$;

A geração n possui 2^n descendentes: $P(n) = 2^n$;

Módulo IV – Contagem. Indução Matemática

Passo 1 Prove a base de indução: $P(1)$ é verdadeiro

Passo 2 Suponha $P(k)$ verdadeiro

Passo 3 Prove $P(k+1)$

Módulo IV – Contagem. Indução Matemática

1. $P(1) = 2 = 2^1$, isto é, $P(n)$ é verdadeiro para $n = 1$;
2. Suponha que $P(k) = 2^k$ (verdadeiro) para k inteiro positivo.
3. Como cada geração tem dois filhos, então $P(k+1) = 2\ P(k)$, isto é, $P(k+1) = 2 \times 2^k = 2^{k+1}$.

Módulo IV – Contagem. Indução Matemática

Exemplo: Prove que a equação a seguir é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

$$1+ 3 + 5 + \dots + (2n-1)= n^2$$

$P(n)$: $1+ 3 + 5 + \dots + (2n-1)= n^2$

1. $P(1)$: $1 = 1^2$, logo $P(1)$ é verdadeiro;
2. Suponha que $P(k)$: $1+ 3 + 5 + \dots + (2k-1)= k^2$ é verdadeiro;
3. Então, $P(k+1)$: $1+ 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$

Módulo IV – Contagem. Indução Matemática

Exemplo: Prove que a equação a seguir é verdadeira para qualquer inteiro positivo n.

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

$$P(n): 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

Fund. De Matemática para Comp

Módulo IV – Contagem. Indução Matemática

1. $P(1)$: $1 + 2 = 3 = 4 - 1 = 2^2 - 1$, logo $P(1)$ é verdadeiro;
2. Suponha que $P(k)$: $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$ é verdadeiro;
3. Então, $P(k+1)$: $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2 \times 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$

Módulo IV – Contagem. Indução Matemática

Exemplo: Prove que, para cada inteiro positivo n,

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$P(n):1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

1. $P(1):1=\frac{1(1+1)}{2}$,

logo P(1) é verdadeiro;

Módulo IV – Contagem. Indução Matemática

2. Suponha que

$$P(k): 1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

é verdadeiro;

3. Então,

$$P(k+1): 1 + 2 + 3 + \ldots + k + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$$

$$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

logo P(k+1) é verdadeiro.

Módulo IV – Contagem. Recursão

Uma definição onde o item definido aparece como parte da definição é chamada de *definição por recorrência.*

Uma definição por recorrência é formada por duas partes:

1. Base ou condição básica, onde algum caso simples do item que está sendo definido é dado explicitamente.
2. Um passo de indução ou recorrência, onde novos casos do item que está sendo definido são dados em função de casos anteriores.

Módulo IV – Contagem. Recursão

Exemplo: A seqüência S é definida por recorrência por

1. $S(1) = 2$
2. $S(n) = 2S(n - 1)$ para $n > 1$

$S(1) = 2$
$S(2) = 2S(1) = 2 \times 2 = 4$
$S(3) = 2S(2) = 2 \times 4 = 8$
$S(4) = 2S(3) = 2 \times 8 = 16$
$S(5) = 2S(4) = 2 \times 16 = 32$

Fund. De Matemática para Comp

Módulo IV – Contagem. Recursão

Exemplo: Escreva os cinco primeiro valores da seqüência T, tal que:

1. $T(1) = 1$
2. $T(n) = T(n - 1) + 3$, para $n > 1$

$T(1) = 1$
$T(2) = T(1) + 3 = 1 + 3 = 4$
$T(3) = T(2) + 3 = 4 + 3 = 7$
$T(4) = T(3) + 3 = 7 + 3 = 10$
$T(5) = T(4) + 3 = 10 + 3 = 13$

Módulo IV – Contagem. Recursão

Exemplo: **Seqüência de Fibonacci**: é uma seqüência introduzida pelo matemático italiano Fibonacci e é definida por recorrência da seguinte forma:

$$F(1) = 1$$
$$F(2) = 1$$
$$F(n) = F(n - 2) + F(n - 1), \text{ para } n > 2$$

$$F(1) = 1$$
$$F(2) = 1$$
$$F(3) = F(1) + F(2) = 1 + 1 = 2$$
$$F(4) = F(2) + F(3) = 1 + 2 = 3$$
$$F(5) = F(3) + F(4) = 2 + 3 = 5$$
$$F(6) = F(4) + F(5) = 3 + 5 = 8$$

"Olho por olho, e o mundo acabará cego."

"Não existe um caminho para a felicidade. A felicidade é o caminho."

"A alegria está na luta, na tentativa, no sofrimento envolvido e não na vitória propriamente dita."

"As religiões são caminhos diferentes convergindo para o mesmo ponto. Que importância faz se seguimos por caminhos diferentes, desde que alcancemos o mesmo objetivo?."

(Mahatma Gandhi)