

Fundamentos de Matemática para Computação

Tecnologia em Rede de
Computadores

Período 2012.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Fundamentos de Matemática para Computação

E-mails:

damasceno12@hotmail.com

damasceno12@uol.com.br

damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info

damasceno.info

Fund. De Matemática para Comp

Módulo II - Relações

Par ordenado: chamamos de par ordenado ao elemento (x,y) formado pelos elementos x,y .

Para localizar um ponto no plano, utilizamos dois números reais, numa certa ordem.

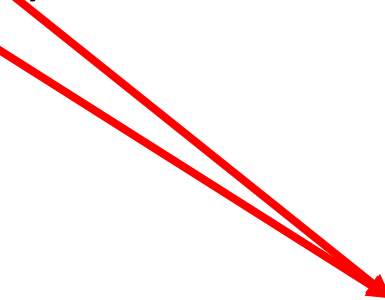
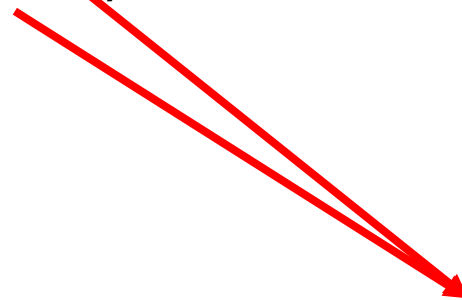
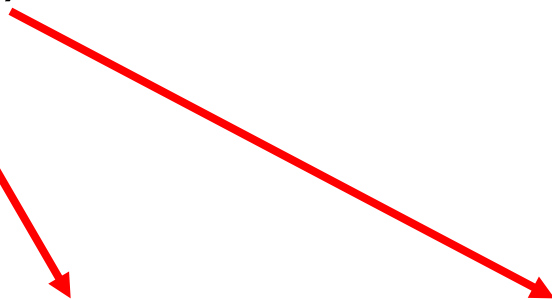
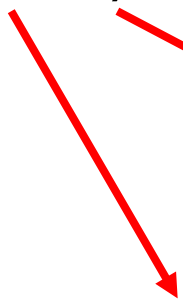
$(3, 4)$

$(-1, 7)$

1º elemento

2º elemento

coordenadas



Fund. De Matemática para Comp

Módulo II - Relações

De um modo geral, sendo x e y dois números reais quaisquer, temos: $(x,y) \neq (y, x)$.

Representação gráfica:

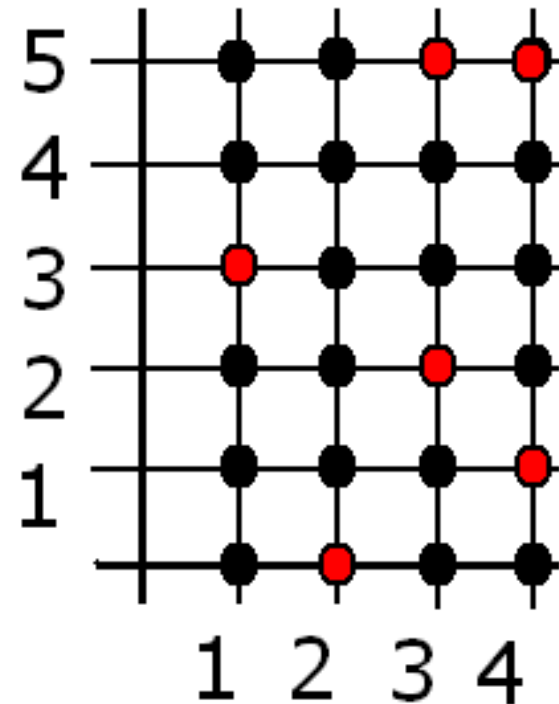
$(3, 5),$ $(4, 5)$

$(1, 3)$

$(3, 2)$

$(4, 1)$

$(2, 0)$



Fund. De Matemática para Comp

Módulo II - Relações

Produto Cartesiano: Dados dois conjuntos A e B, não vazios, chamamos de produto cartesiano de A por B ao conjunto $A \times B$, definido por:

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B \}$$

Exemplo 1: $A = \{ 1, 2 \}$ $B = \{ 3, 5 \}$

$$A \times B = \{ (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5) \}$$

Exemplo 2: $A = \{ 1, 2 \}$ $B = \{ 3, 5, 7 \}$

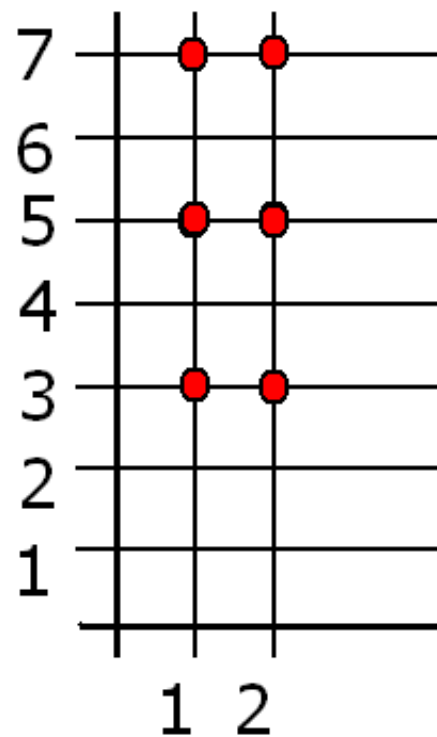
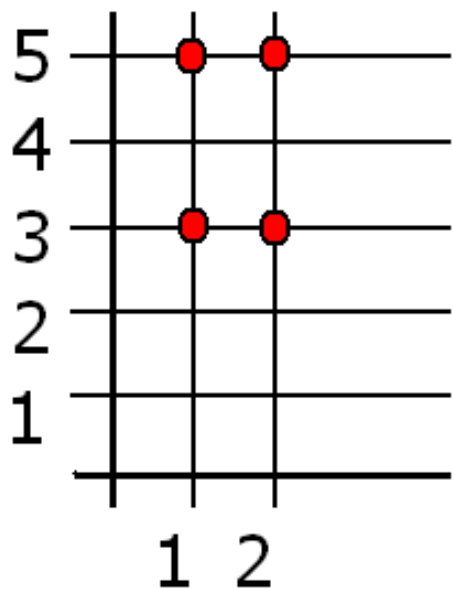
$$A \times B = \{ (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 3), (2, 5), (2, 7) \}$$

Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Representação gráfica

Ex. 1: $A \times B = \{ (1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5) \}$

Ex. 2: $A \times B = \{ (1, 3), (1, 5), (1, 7), (2, 3), (2, 5), (2, 7) \}$



Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações

Dados dois conjuntos, A e B , não vazios, chamamos de **relação binária R de A em B**

qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$

$$R \subset A \times B$$

O conjunto A é chamado de ***domínio*** de R .

O conjunto B é chamado de ***contradomínio*** de R .

Os elementos de A são representados por x e os elementos de B são representados por y .

O conjunto formado por todos os y pertencentes à relação chamamos de ***imagem***.

Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações

Exemplo: $A = \{ 1, 2, 3 \}$ $B = \{ 4, 5, 6 \}$

$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), \dots (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

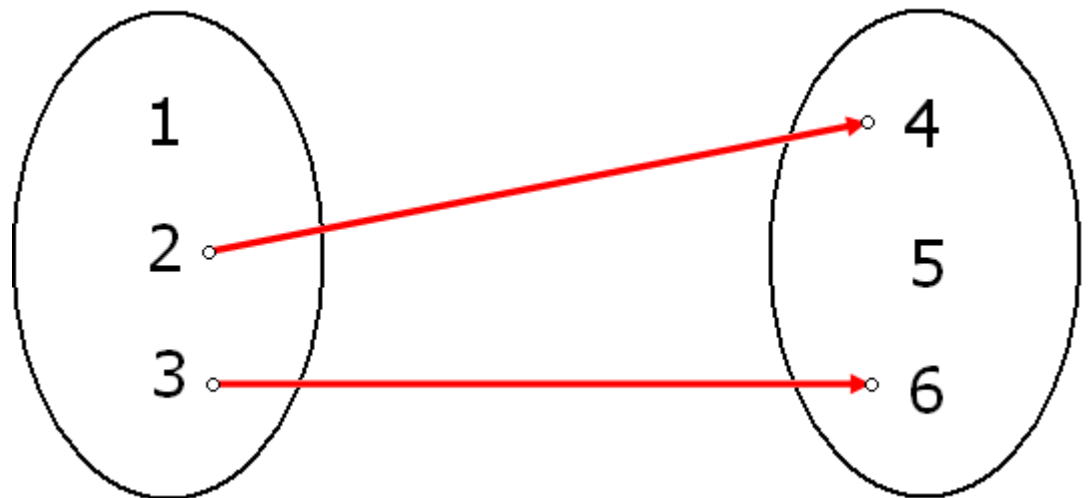
$R = \{ (x, y) \in A \times B \mid y = 2x \},$ i. é.,

$R = \{ (2, 4), (3, 6) \}$

$$D(R) = \{1, 2, 3\}$$

$$CD(R) = \{4, 5, 6\}$$

$$Im(R) = \{4, 6\}$$



Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações

Exemplo: $A = \{ 1, 2, 3 \}$ $B = \{ 4, 5, 6 \}$

$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (1, 6), \dots (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

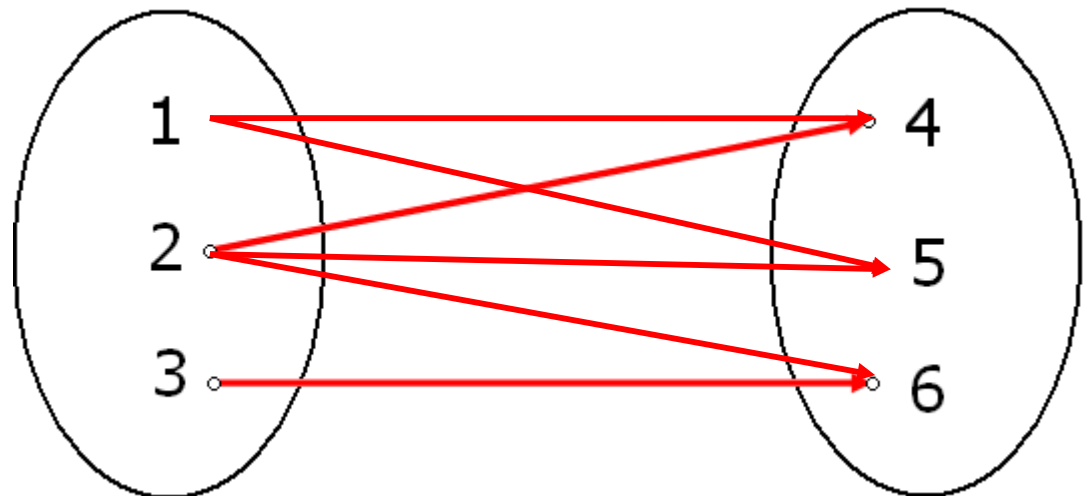
$R = \{ (x, y) \in A \times B \mid y = 2x \},$ i. é.,

$R = \{ (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 6) \}$

$$D(R) = \{1, 2, 3\}$$

$$CD(R) = \{4, 5, 6\}$$

$$Im(R) = \{4, 5, 6\}$$



Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Relação inversa.

Seja R uma relação de A em B . A **relação inversa de R** , denotada por R^{-1} , é definida de B em A por:

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in R\}$$

Exemplos:

$$R = A \times B = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5)\}$$

$$R^{-1} = B \times A = \{(3, 1), (5, 1), (3, 2), (5, 2)\}$$

$$R = \{(2, 4), (3, 6)\}$$

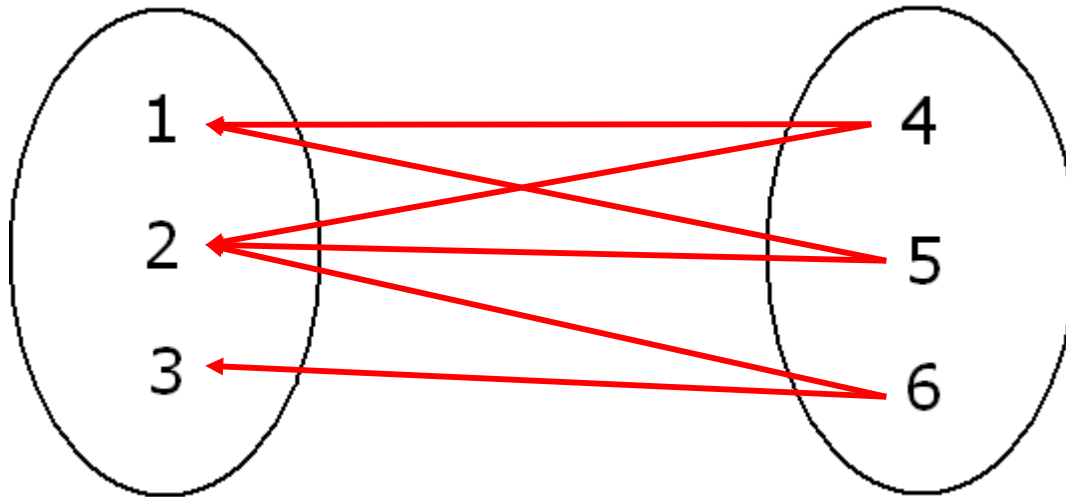
$$R^{-1} = \{(4, 2), (6, 3)\}$$

Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Relação inversa.

$$R = \{ (1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 6) \}$$

$$R^{-1} = \{ (4, 1), (5, 1), (4, 2), (5, 2), (6, 2), (6, 3) \}$$



Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Matriz de uma relação.

Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios tais que $n(A) = m$ e $n(B) = n$.

Qualquer relação $R : A \rightarrow B$ pode ser representada como uma matriz do seguinte modo:

$M[i,j] = 1$ se, e somente se, $(a_i, b_j) \in R$;

$M[i,j] = 0$ se, e somente se, $(a_i, b_j) \notin R$;

Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Matriz de uma relação.

Exemplo

$$\text{Seja } A = \{1, 2, 3\},$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ e } R \subseteq A \times B,$$

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 4), (3, 5)\} \text{ Então,}$$

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	0	0
2	0	1	0	0	0
3	0	0	0	1	1

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Matriz de uma relação.

Dado os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a,b\}$ e $C = \{0,1,2\}$, temos:

$$a) R = \{(x, y) \in B \times B \mid x = y\}$$

=	a	b
a	1	0
b	0	1

Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Matriz de uma relação.

Dado os conjuntos $A = \{a\}$, $B = \{a,b\}$ e $C = \{0,1,2\}$, temos:

b) $R = \{(x, y) \in C \times C \mid x < y\}$

$<$	0	1	2
0	0	1	1
1	0	0	1
2	0	0	0

c) $R = A \times B$

$A \times B$	a	b
a	1	1

Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Propriedades.

Reflexiva: Uma relação $R : A \rightarrow A$ é reflexiva se todo elemento de A está relacionado consigo mesmo;

para todo $x \in A$: $(x,x) \in R$.

Exemplo: $A = \{a, b, c\}$

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

$R = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid a^2 = b^2\}$. Como $a^2 = a^2$, para todo $a \in \mathbb{R}$, é reflexiva.

Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Propriedades.

Exemplo: Sejam as relações sobre o conjunto
 $S = \{1,2,3,4\}$

$$R1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$$

$$R2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$$

$$R3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$$

$$R4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$

$$R5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), \\ (3,4), (4,4)\}$$

$$R6 = \{(3,4)\}$$

As relações R3 e R5 são Reflexivas, as demais não

Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Propriedades.

Exemplo: Sejam as relações sobre o conjunto dos inteiros

$$R1 = \{(a,b) \mid a \leq b\}$$

$$R2 = \{(a,b) \mid a > b\}$$

$$R3 = \{(a,b) \mid a = b \text{ ou } a = -b\}$$

$$R4 = \{(a,b) \mid a = b\}$$

$$R5 = \{(a,b) \mid a = b + 1\}$$

$$R6 = \{(a,b) \mid a + b \leq 3\}$$

As relações R1, R3 e R4 são Reflexivas

Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Propriedades.

Exemplo:

Seja A o conjunto dos números reais e E uma relação em A definida por:

$$x E y \Leftrightarrow x - y = 5$$

Observe que, $6 E 1$, $8 E 3$ etc. mas x não está relacionado com x , já que $x - x = 0 \neq 5$. Logo, a relação E **não** é reflexiva.

Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Propriedades.

Simétrica: Uma relação $R : A \rightarrow A$ é simétrica se $x R y$, implicar necessariamente que $y R x$;

Se $x R y \Rightarrow (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R \Rightarrow y R x$.

Exemplo: $A = \{a, b, c\}$

$R = \{(a, a), (a, b), (b, a)\}$

$A = \{\text{conjunto dos seres humanos}\}$

$R = \{(x, y) \in A \times A \mid x \text{ é irmão de } y\}$

Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Propriedades.

R é simétrica, pois se x é irmão de y, então y é irmão de x.

A = conjunto dos números reais;

$R = \{(x, y) \mid x^2 = y\}$ não é simétrica pois, $2^2 = 4$, mas $4^2 \neq 2$.

$R = \{(x, y) \mid y = 2x\}$ não é simétrica pois, $6 = 2 \times 3$, mas $3 \neq 2 \times 6$.

Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Propriedades.

Exemplo: Sejam as relações sobre o conjunto
 $S = \{1,2,3,4\}$

$$R1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$$

$$R2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$$

$$R3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$$

$$R4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$

$$R5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), \\ (3,4), (4,4)\}$$

$$R6 = \{(3,4)\}$$

As relações R2 e R3 do Exemplo acima são Simétricas

Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Propriedades.

Transitiva: Uma relação $R : A \rightarrow A$ é transitiva, se $x R y$ e $y R z$, implicar que $x R z$;

Se $x R y$ e $y R z \Rightarrow (x, y), (y, z) \in R$

$\Rightarrow (x, z) \in R \Rightarrow x R z$.

Exemplo: $A = \{a, b, c\}$

$R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (a, c)\}$

Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Propriedades.

Ex.: Sejam as relações definidas nos conjuntos indicados. Qual delas é uma relação transitiva?

(a) $R = \{(2, 6), (6, 8), (8, 2)\}$, conjunto $A = \{2,6,8\}$.

(b) $R = \{(1, 3), (3, 4), (1, 2)\}$, conjunto $A = \{1,2,3,4\}$.

(c) $R = \{(1, 3), (3, 5), (1, 5)\}$, conjunto $A = \{1,3,5\}$.

(d) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$, conjunto $A = \{1,2,3\}$.

(e) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2)\}$, conjunto $A = \{1,2,3\}$.

Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Propriedades.

Ex.: Seja $R = \{(x, y) \mid x = y; x, y \text{ naturais}\}$. Então R é uma relação transitiva, pois se $x = y$ e $y = z$ então $x = z$

Ex.: Seja $R = \{(x, y) \mid x < y; x, y \text{ naturais}\}$. Então R é uma relação transitiva, pois se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$

Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Propriedades.

Exemplo: Sejam as relações sobre o conjunto dos inteiros

$$R1 = \{(a,b) \mid a \leq b\}$$

$$R2 = \{(a,b) \mid a > b\}$$

$$R3 = \{(a,b) \mid a = b \text{ ou } a = -b\}$$

$$R4 = \{(a,b) \mid a = b\}$$

$$R5 = \{(a,b) \mid a = b + 1\}$$

$$R6 = \{(a,b) \mid a + b \leq 3\}$$

As relações R1, R2, R3 e R4 do Exemplo acima são Transitivas

Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Propriedades.

Anti-simétrica: Sejam $x \in A$ e $y \in A$. Uma relação $R : A \rightarrow A$ é anti-simétrica se $(x,y) \in R$ e $(y,x) \in R$ implica que $x=y$.

Se $x R y$ e $y R x \Rightarrow (x, y), (y, x) \in R$

$\Rightarrow (x, x) \in R \Rightarrow x = y$.

Exemplo: $A = \{a, b, c\}$

$R = \{(a, a), (b, b), (a, b), (a, c)\}$

Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Propriedades.

Exemplo: Sejam as relações sobre o conjunto
 $S = \{1,2,3,4\}$

$$R1 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$$

$$R2 = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$$

$$R3 = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$$

$$R4 = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$

$$R5 = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3),$$

$$R6 = \{(3,4)\} \qquad (3,4), (4,4)\}$$

As relações R4, R5 e R6 do exemplo são Anti-simétricas

Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Propriedades.

Exemplo: Sejam as relações sobre o conjunto dos inteiros

$$R1 = \{(a,b) \mid a \leq b\}$$

$$R2 = \{(a,b) \mid a > b\}$$

$$R3 = \{(a,b) \mid a = b \text{ ou } a = -b\}$$

$$R4 = \{(a,b) \mid a = b\}$$

$$R5 = \{(a,b) \mid a = b + 1\}$$

$$R6 = \{(a,b) \mid a + b \leq 3\}$$

As relações R1, R2, R4 e R5 do exemplo são
Anti-simétricas

Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Propriedades.

Ex.: Defina uma relação no conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$ que seja:

a) reflexiva, simétrica e não seja transitiva.

$$R = \{(1, 1)\}$$

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 3)\}$$

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 3), (2, 1), (3, 2)\}$$

Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Grafo da relação.

Módulo II – Relações. Grafo da relação.

Uma relação definida de um conjunto A no próprio conjunto A é chamada **relação binária de A para A** .

Uma representação gráfica de uma relação binária onde o conjunto A é desenhado somente uma vez e uma seta é desenhada para cada par de pontos relacionados entre si é chamada de **GRAFO DIRIGIDO**

Exemplo: $R = \{(1; 1); (1; 3); (3; 1)\}$



Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Grafo da relação.

As relações em A podem ser representadas por grafos dirigidos os quais são constituídos por um conjunto de vértices (que representam os elementos de A) e um conjunto de ramos (que correspondem aos pares ordenados que pertencem a relação).

Exemplo: $R = \{(1; 1); (2; 2); (3; 3); (4; 4); (5; 5)\}$



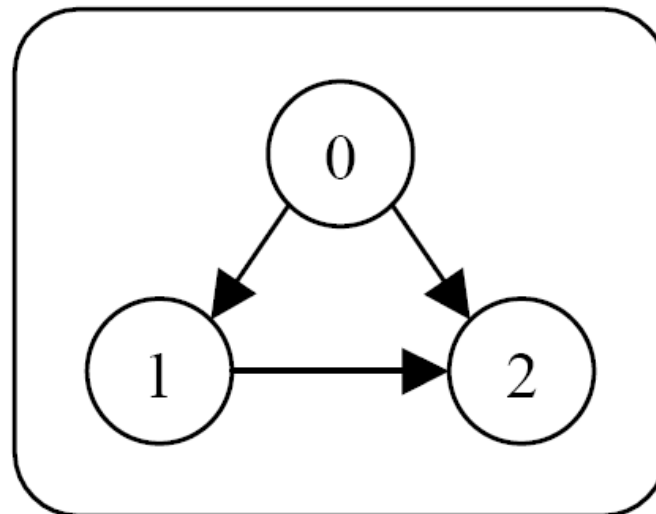
Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Grafo da relação.

Exemplo: $R = \{(1; 1); (1; 3); (3; 1)\}$



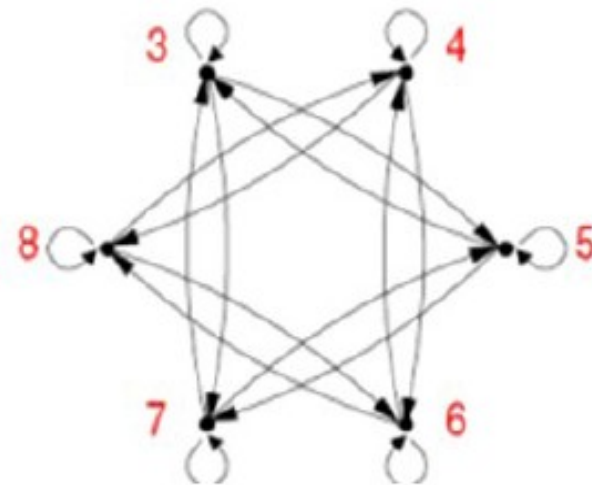
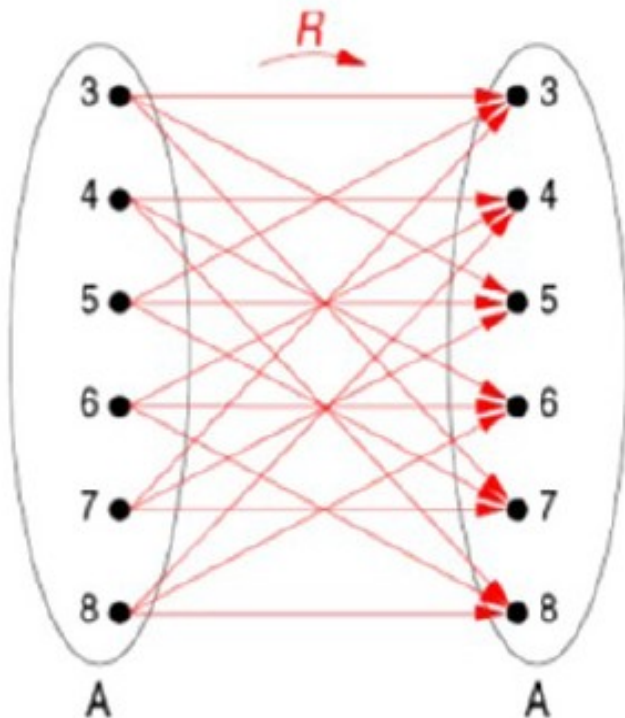
Exemplo: $R = \{(0; 1); (0; 2); (1; 2)\}$



Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Grafo da relação.

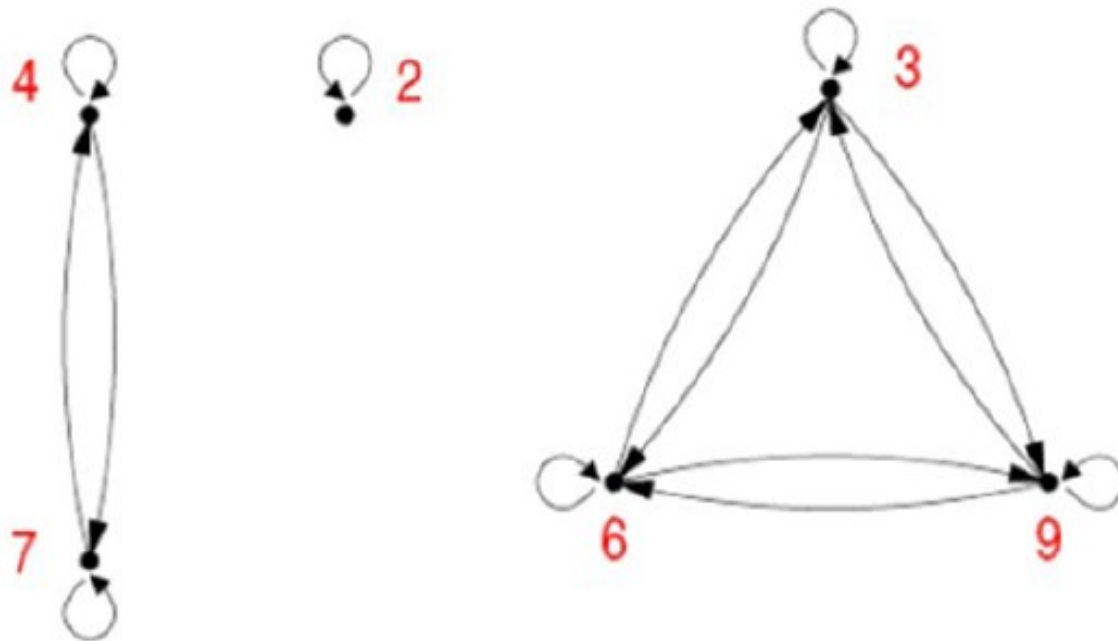
Exemplo: Seja $A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e a relação binária R definida por todos os pares ordenados (x, y) em que 2 divide a diferença $x - y$. Veja o diagrama da relação R e do seu grafo dirigido

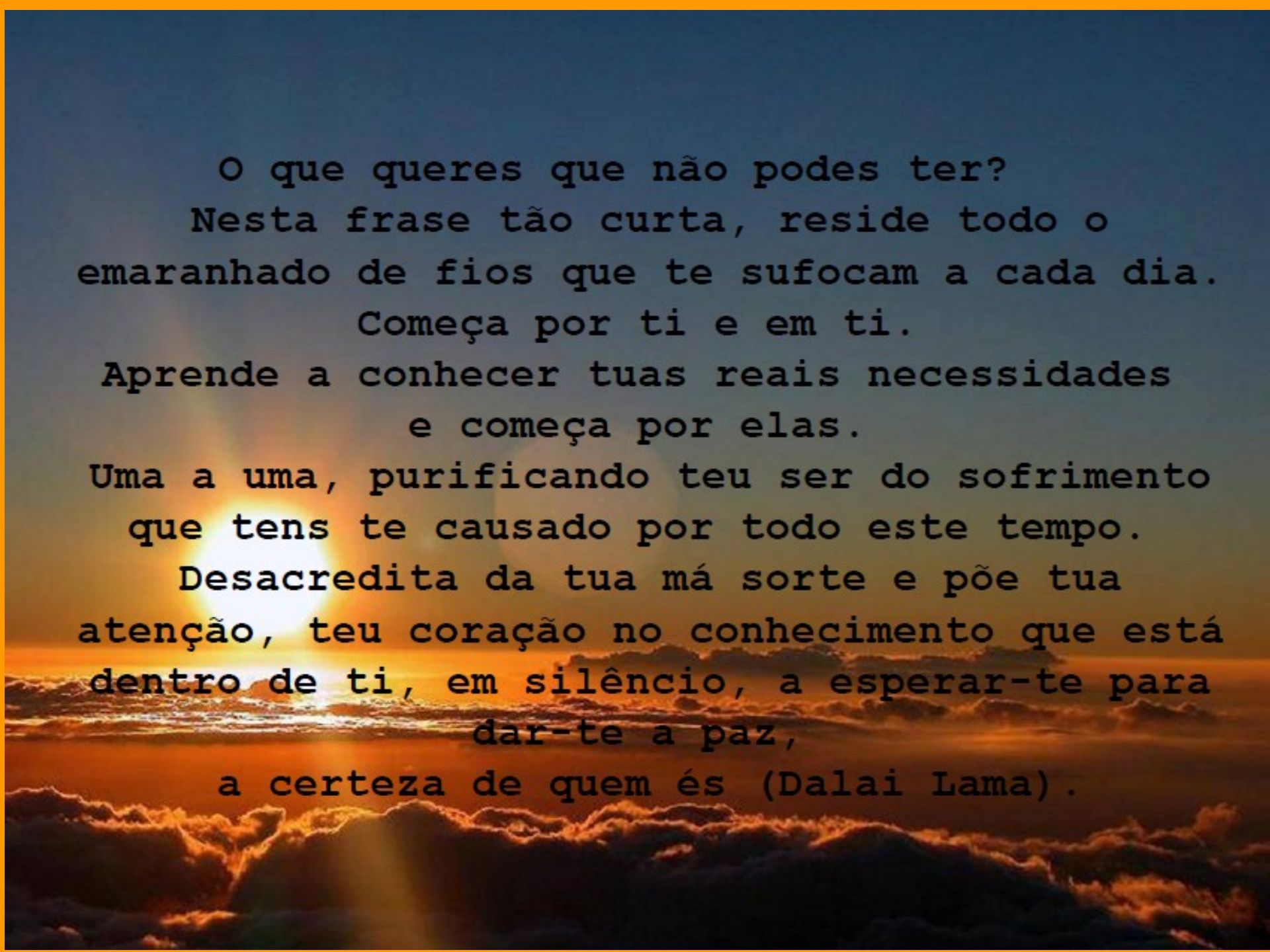


Fund. De Matemática para Comp

Módulo II – Relações. Grafo da relação.

Exemplo: Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 7, 9\}$ e a relação binária R definida por todos os pares ordenados (x, y) em que 3 divide a diferença $x - y$. Veja o diagrama da relação R e do seu grafo dirigido





O que queres que não podes ter?

Nesta frase tão curta, reside todo o emaranhado de fios que te sufocam a cada dia.

Começa por ti e em ti.

Aprende a conhecer tuas reais necessidades e começa por elas.

Uma a uma, purificando teu ser do sofrimento que tens te causado por todo este tempo.

Desacredita da tua má sorte e põe tua atenção, teu coração no conhecimento que está dentro de ti, em silêncio, a esperar-te para dar-te a paz, a certeza de quem és (Dalai Lama).