Cálculo Diferencial e Integral IV

Curso de
Engenharia
Civil

Período 2015.2

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Cálculo Diferencial e Integral IV

E-mails:

damasceno12@hotmail.com
damasceno12@uol.com.br
damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info
damasceno.info

Cálculo Diferencial e Integral IV

"Ser feliz é encontrar força no perdão, esperanças nas batalhas, segurança no palco do medo, amor nos desencontros. É agradecer a Deus a cada minuto pelo milagre da vida."

Fernando Pessoa

Série de Maclaurin

Seja $y = f(x)$ uma função derivável até a ordem n.

Uma aproximação linear de $y = f(x)$ em $x = 0$ é um polinômio $p(x) = c_0 + c_1 x$ tal que $p(0) = f(0)$ e $p'(0) = f'(0)$.

$$p(0) = c_0 \qquad => \qquad c_0 = f(0)$$

$$p'(0) = c_1 \qquad => \qquad c_1 = f'(0)$$

$$p(x) = f(0) + f'(0)x$$

Série de Maclaurin

Uma aproximação quadrática de $y = f(x)$ em $x = 0$ é um polinômio $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ tal que $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$ e $p''(0) = f''(0)$.

$$p(0) = c_0 \quad => \quad c_0 = f(0)$$

$$p'(0) = c_1 \quad => \quad c_1 = f'(0)$$

$$p''(0) = 2c_2 \quad => \quad c_2 = \frac{f''(0)}{2}$$

Cálculo Diferencial e Integral IV

Série de Maclaurin

Uma aproximação polinomial de ordem n de $y = f(x)$ em $x = 0$ é um polinômio

$$p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n \quad \text{tal que}$$

$$p(0) = f(0) \;,\quad p'(0) = f'(0) \;,\quad p''(0) = f''(0) \;,$$

$$\ldots,\quad p^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

$$p(0) = c_0 \qquad => \qquad c_0 = f(0)$$

$$p'(0) = c_1 \qquad => \qquad c_1 = f'(0)$$

....

$$p^{(n)}(0) = n!\,c_n \qquad => \qquad c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Série de Maclaurin

Exemplo: Mostre que

a) uma aproximação linear de $y = e^x$ em $x = 0$ é $e^x = 1 + x$.

b) uma aproximação quadrática de $y = e^x$ em $x = 0$ é $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

c) uma aproximação polinomial de ordem *4* de $y = e^x$ em $x = 0$ é $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24}$.

Cálculo Diferencial e Integral IV

Série de Maclaurin

d) uma aproximação polinomial de ordem n de $y = e^x$

em $x = 0$ é $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!}$.

Cálculo Diferencial e Integral IV

Série de Taylor

Seja $y = f(x)$ uma função derivável até a ordem n.

Uma aproximação linear de $y = f(x)$ em $x = x_0$ é um polinômio $p(x) = c_0 + c_1(x - x_0)$ tal que

$p(x_0) = f(x_0)$ e $p'(x_0) = f'(x_0)$.

$$p(x_0) = c_0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = f(x_0)$$

$$p'(x_0) = c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = f'(x_0)$$

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Cálculo Diferencial e Integral IV

Série de Taylor

Uma aproximação quadrática de $y = f(x)$ em $x = x_0$ é um polinômio

$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2$ tal que

$p(x_0) = f(x_0)$, $p'(x_0) = f'(x_0)$ e

$p''(x_0) = f''(x_0)$.

$$p(x_0) = c_0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = f(x_0)$$

$$p'(x_0) = c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = f'(x_0)$$

$$p''(x_0) = 2c_2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

Cálculo Diferencial e Integral IV

Série de Taylor

Uma aproximação polinomial de ordem n de $y = f(x)$ em $x = x_0$ é um polinômio

$$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n$$

tal que $p(x_0) = f(x_0)$, $p'(x_0) = f'(x_0)$,

$$p''(x_0) = f''(x_0) \;, \ldots , \; p^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

$$p(x_0) = c_0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = f(x_0)$$

$$p'(x_0) = c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = f'(x_0)$$

....

$$p^{(n)}(x_0) = n!\,c_n \quad \Rightarrow \quad c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

Série de Taylor

Exemplo: Ache os quatro primeiros polinômios de Taylor para

$f(x) = \ln x$ em torno de $x = 2$.

$$f(x) = \ln x \quad => \quad f(2) = \ln 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad => \quad f'(2) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \quad => \quad f''(2) = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \quad => \quad f'''(2) = \frac{1}{4}$$

Série de Taylor

Exemplo: Ache os quatro primeiros polinômios de Taylor para

$f(x) = \ln x$ em torno de $x = 2$.

$$p_0(x) = \ln 2$$

$$p_1(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$p_2(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 2) - \frac{1}{8}(x - 2)^2$$

$$p_2(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}(x - 2) - \frac{1}{8}(x - 2)^2 + \frac{1}{24}(x - 2)^3$$

Séries de Taylor e de Maclaurin

Se f tiver derivadas de todas as ordens em $x = x_0$,

então chamamos a série

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) +$$

$$\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ldots$$

de série de Taylor para f em torno de $x = x_0$.

Cálculo Diferencial e Integral IV

Séries de Taylor e de Maclaurin

Se f tiver derivadas de todas as ordens em $x = 0$, então chamamos a série

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!} x^k = f(0) + f\,'(0)\,x + \frac{f\,''(0)}{2\,!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!} x^k + \ldots$$

de série de Maclaurin para f em torno de $x = 0$.

Exemplo: Ache as séries de Maclaurin para

a) e^x b) $sen\,x$ c) $\cos x$ d) $\ln x$

Séries de Taylor e de Maclaurin

Chamamos de domínio de convergência de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ao subconjunto de R para o qual a série é convergente.

$(-r, r)$ - intervalo de convergência

r - raio de convergência.

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Cálculo Diferencial e Integral IV

Séries de Taylor e de Maclaurin

Exemplo: Determine o raio e o intervalo de convergência da série:

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(x-3)^n$

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n + \frac{1}{n!}(x-2)^n$

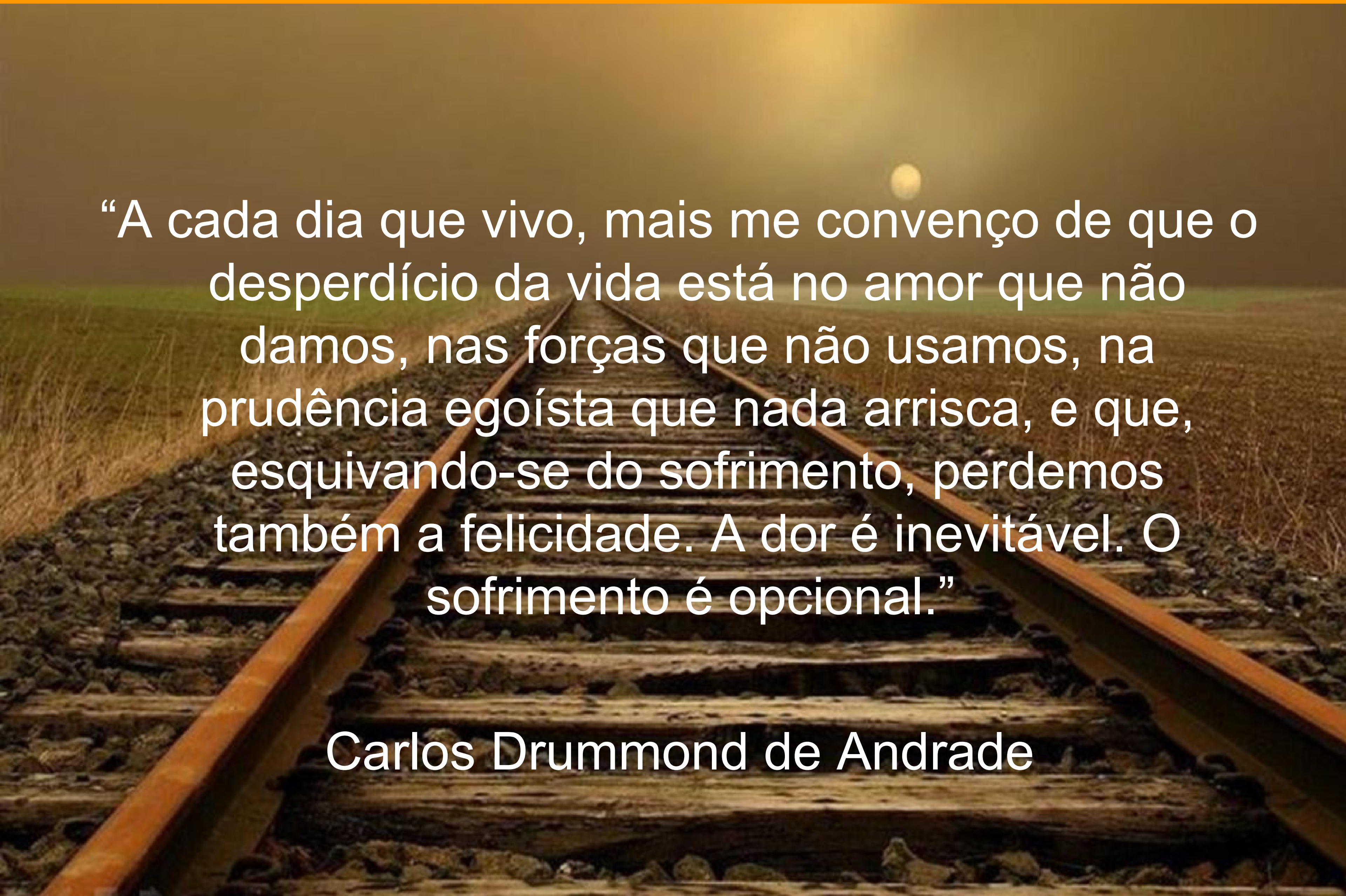
Cálculo Diferencial e Integral IV

Séries de Taylor e de Maclaurin

Exemplo: Considere a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^{n+1}}(1 - 2x)^{n+3}$

1) Determine o maior intervalo onde a série é absolutamente convergente.
2) Determine no intervalo indicado a soma da série.

Cálculo Diferencial e Integral IV



"A cada dia que vivo, mais me convenço de que o desperdício da vida está no amor que não damos, nas forças que não usamos, na prudência egoísta que nada arrisca, e que, esquivando-se do sofrimento, perdemos também a felicidade. A dor é inevitável. O sofrimento é opcional."

Carlos Drummond de Andrade