Cálculo Diferencial e Integral IV

Curso de

Engenharia

Civil

Período 2015.2

Prof. da Disciplina

Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Cálculo Diferencial e Integral IV

E-mails:

damasceno12@hotmail.com
damasceno12@uol.com.br
damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info
damasceno.info

Cálculo Diferencial e Integral IV

"Ser feliz é encontrar força no perdão, esperanças nas batalhas, segurança no palco do medo, amor nos desencontros. É agradecer a Deus a cada minuto pelo milagre da vida."

Fernando Pessoa

Cálculo Diferencial e Integral IV

Sequências infinitas

Uma sequência infinita de números reais é uma função $f : N \to R$ definida por $f(n) = a_n$.

a_n é chamado de termo geral da sequência

Exemplo 1: a) $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots$ é uma sequência infinita onde $a_n = n$.

b) $2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10, \ldots$ é uma sequência infinita onde $a_n = 2n$.

Sequências infinitas

Exemplo 2: Determine o termo geral da sequência:

a) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

b) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

d) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$

Sequências infinitas

Exemplo 3: Escreva a sequência cujo termo geral é dado por:

a) $2n + 1$

b) $n^2 - 1$

c) $\dfrac{(-1)^n}{n}$

d) $\dfrac{n!}{n^n}$

Cálculo Diferencial e Integral IV

Sequências infinitas

Dizemos que uma sequência $[a_n]$ converge para um número real L se existe $\lim_{n\to\infty} a_n$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

Dizemos que uma sequência $[a_n]$ diverge quando não converge para um número real L.

Cálculo Diferencial e Integral IV

Sequências infinitas

Exemplo: a) $a_n = \dfrac{1}{n}$ converge para $L = 0$ pois

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

b) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ converge para $L = 1$ pois

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

c) $a_n = 2n+1$ diverge pois

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2n+1 = \infty$$

Sequências infinitas

Teorema: Suponha que $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são sequências que converegem para L_1 e L_2, respectivamente. Seja c uma constante. Então

a) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} c\,a_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c\,L_1$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_1 + L_2$

Sequências infinitas

Teorema: Suponha que $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são sequências que converegem para L_1 e L_2 , respectivamente. Seja c uma constante. Então

d) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_1 - L_2$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \,.\, b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \,.\, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_1 \,.\, L_2$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{L_1}{L_2}$

Sequências infinitas

Exemplo: Determine se a sequência converge ou diverge. Se convergir, ache o limite.

a) $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$

b) $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{2n+1}$

c) $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{2n+1}$

d) $a_n = 8 - 2n$

e) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$

f) $a_n = 2^n$

Sequências infinitas

Exemplo: (Regra de l´Hopital) $$a_n = \frac{n}{e^n}$$

Exemplo: $a_n = \sqrt[n]{n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^0 = 1$$

Cálculo Diferencial e Integral IV

Sequências infinitas

Teorema do confronto para sequências: Sejam a_n, b_n, c_n sequências tais que $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$. Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$, então $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

Exemplo: $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ $\quad a_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{n}.\dfrac{3}{n}.\ldots.\dfrac{n}{n}\right)$ $\quad \Rightarrow$

$$a_n < \frac{1}{n}$$

Sequências infinitas

Teorema do confronto para sequências: Sejam a_n, b_n, c_n sequências tais que $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$. Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, então $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

Exemplo: $a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n}$

Exemplo: Mostre que $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{2}{a_n}\right)$ é uma sequência que gera o número real $\sqrt{2}$.

Séries infinitas

Uma série infinita é uma expressão que pode ser escrita na forma $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_k + \ldots$.

Os números $a_1, a_2, a_3, \ldots$ são chamados de termos da série.

Exemplo: $0{,}333333\ldots = 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \ldots =$

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \ldots$$

Séries infinitas

Exemplo: Mostre que $0{,}3333\ldots = \frac{1}{3}$

$$s_n - \frac{1}{10}s_n = \frac{3}{10} - \frac{3}{10^{n+1}}$$

$$\frac{9}{10}s_n = \frac{3}{10}\left(1-\frac{1}{10^n}\right) \quad \Rightarrow \quad 9L = 3$$

s_n – n – ésima soma parcial da série

Séries infinitas

Seja s_n a sequência das somas parciais da série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_k + \ldots$. Se a sequência s_n convergir para um limite S, dizemos, então, que a série converge para S e que S é a soma da série.

Se a sequência das somas parciais divergir, então a série diverge.

Séries infinitas

Exemplo: Verifique se a série converge ou diverge

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k = -1+1-1+1-1+\ldots$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k$$

$$s_1 = -1$$

$$s_2 = -1+1 = 0$$

$$s_3 = -1+1-1 = -1$$

$$s_4 = -1+1-1+1 = 0$$

A sequência das somas parciais é divergente. Logo a série é divergente.

Séries geométricas

$$\sum_{k=0}^{\infty} a\,r^k = a + a\,r + a\,r^2 + \ldots a\,r^k + \ldots$$

$r - razão\ da\ série$

Exemplos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k = 1 + 2 + 4 + \ldots 2^k + \ldots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots \frac{1}{2^k} + \ldots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - \ldots (-1)^k + \ldots$$

Cálculo Diferencial e Integral IV

Uma série geométrica

$$\sum_{k=0}^{\infty} a\,r^k = a + a\,r + a\,r^2 + \dots a\,r^k + \dots \quad \text{converge}$$

se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geqslant 1$. Se a série converge, então

$$\sum_{k=0}^{\infty} a\,r^k = \frac{a}{1-r} \quad .$$

$$s_n - r\,s_n = a - a\,r^{n+1}$$

$$s_n = \frac{a - a\,r^{n+1}}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{a\,r^{n+1}}{1 - r}$$

Então, $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \dfrac{a}{1 - r}$ se $r < 1$ e s_n diverge se $r \geq 1.$

Cálculo Diferencial e Integral IV

Séries geométricas

Exemplo: $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5}{4^k} = 1 + \frac{5}{4} + \frac{5}{4^2} + \ldots \frac{5}{4^k} + \ldots$ é uma série geométrica com $a = 5$ e $r = 1/4$, portanto convergente.

A soma da série é $\displaystyle\frac{a}{1 - r} = \frac{5}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{20}{3}$

Séries geométricas

Exemplo: Determine se a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots \frac{1}{k.k+1} + \ldots$$

converge ou diverge. Se converge ache a soma.

Sugestão: $$\frac{1}{k.k+1} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

Testes de convergência ou divergência:

1) Se $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ então $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

2) Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ então a série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ pode convergir ou divergir.

3) Se $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exemplo: Mostre que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$ diverge.

Testes de convergência ou divergência:

Exemplo:

1) $\sum_{0}^{\infty} (-1)^n$ diverge pois $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ não existe.

2) $\sum_{0}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ diverge pois $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

3) $\sum_{0}^{\infty} \frac{n^2}{n+1}$ diverge pois $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty \neq 0$

Cálculo Diferencial e Integral IV

Testes de convergência ou divergência:

Propriedades: 1) $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k + b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

2) $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k - b_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

3) $$\sum_{k=1}^{\infty} c\, a_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Exemplo: Ache a soma da série $$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4^k} - \frac{2}{5^{k-1}}\right)$$

Exemplo: Determine se a seguinte série converge ou diverge

a) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k}$$

b) $$\sum_{k=10}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Cálculo Diferencial e Integral IV

Testes de convergência ou divergência:

Teste da integral:

Seja $\sum a_n$ uma série com $a_n > 0$

e seja $f(x)$ uma função contínua tal que $f(n) = a_n$. Então

$\sum_{0}^{\infty} a_n$ converge <=> $\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$ converge.

Exemplo: Use o teste da integral para determinar se a seguinte série converge ou diverge.

a) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k}$ b) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Cálculo Diferencial e Integral IV

Testes de convergência ou divergência:

Exemplo:

1) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge pois $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ pois converge

2) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge pois $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ pois diverge

3) $\sum_{1}^{\infty} n e^{-n}$ converge pois $\int_{1}^{\infty} x e^{-x} dx$ converge

Cálculo Diferencial e Integral IV

Testes de convergência ou divergência:

Teste da comparação: Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries com termos não negativos tais que $a_n \leqslant b_n$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Se $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge.

Se $\sum a_n$ diverge, então $\sum a_n$ diverge.

Exemplo:

1) $\sum_{1}^{\infty} \frac{sen\, n}{n^2+1}$ converge pois $\frac{-1}{n^2+1} < \frac{sen\, n}{n^2+1} < \frac{1}{n^2+1}$

2) $\sum_{1}^{\infty} \frac{3n+1}{2n^2+5}$

Cálculo Diferencial e Integral IV

Testes de convergência ou divergência:

Teste da razão: Seja $\sum a_n$ uma série com termos não

negativos e $r = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Então,

a) a série converge se $r < 1$

b) a série diverge se $r > 1$

c) nada podemos afirmar se $r = 1$

Exemplo:

1) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 2) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$ 3) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{2^{n+1}}$

Testes de convergência ou divergência:

Teste da raiz: Seja $\sum a_n$ uma série com termos não negativos e $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Então,

a) a série converge se $r < 1$

b) a série diverge se $r > 1$

c) nada podemos afirmar se $r = 1$

Exemplo:

1) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(\ln n)^n}$

Testes de convergência ou divergência:

Uma série $\sum_{1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente se a série $\sum_{1}^{\infty} | a_n |$ é convergente.

Teorema: Se a série $\sum_{1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente, então $\sum_{1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Exemplo: 1) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ 2) $\sum_{1}^{\infty} \frac{sen\, n}{n^2+1}$

Cálculo Diferencial e Integral IV

Testes de convergência ou divergência:

Prove que as séries são divergentes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2(-1)^{n+1}$

c) $\displaystyle\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\cdots+\frac{n}{2n+1}+\cdots$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$

Determine se a série dada é convergente ou divergente:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$

Cálculo Diferencial e Integral IV

Testes de convergência ou divergência:

Determine se as séries seguintes convergem ou divergem:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+5^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-1}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}+1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5n}{2^n(n^2+1)}$

Use o teste da razão e determine se a série é absolutamente convergente.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{n!}{n^2}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$

Cálculo Diferencial e Integral IV

Testes de convergência ou divergência:

Determine se as séries seguintes convergem ou divergem:

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+4}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\frac{3}{2}\pi)+2}{3^n}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n}+\frac{1}{4^n}\right)$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^n+1}$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+2)^{1/3}}$

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n(n+1)}$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3^n}$

Cálculo Diferencial e Integral IV

"A cada dia que vivo, mais me convenço de que o desperdício da vida está no amor que não damos, nas forças que não usamos, na prudência egoísta que nada arrisca, e que, esquivando-se do sofrimento, perdemos também a felicidade. A dor é inevitável. O sofrimento é opcional."

Carlos Drummond de Andrade