Cálculo Diferencial e Integral IV

Curso de
Engenharia
Civil

Período 2015.2

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Cálculo Diferencial e Integral IV

E-mails:

damasceno12@hotmail.com
damasceno12@uol.com.br
damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info
damasceno.info

Cálculo Diferencial e Integral IV

"Ser feliz é encontrar força no perdão, esperanças nas batalhas, segurança no palco do medo, amor nos desencontros. É agradecer a Deus a cada minuto pelo milagre da vida."

Fernando Pessoa

Cálculo Diferencial e Integral IV

Transformada de Laplace

A transformada de Laplace de uma função $f:(0,\infty)\rightarrow R$

é definida por

$$L(f)(s) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \quad \text{para todo s} > 0.$$

Representação:

$$F(s) = L(f)(s)$$

$$G(s) = L(g)(s)$$

$$H(s) = L(h)(s)$$

Cálculo Diferencial e Integral IV

Exemplo 1: Mostre que a transformada de Laplace da função $f(t) = 1$ é dada por $F(s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0$.

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^{A} e^{-st}\, dt =$$

$$= \lim_{A \to \infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-sA}}{s} \right) = \frac{1}{s}$$

Exemplo 2: Mostre que a transformada de Laplace da função $f(t) = e^{at}$ é dada por $F(s) = \dfrac{1}{s - a}, \quad s > a$.

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt = \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{(a - s)t}\, dt =$$

$$= \lim_{A \to \infty} \left(\frac{1}{s - a} - \frac{e^{-(s - a)A}}{s - a} \right) = \frac{1}{s - a}$$

Exemplo 3: Mostre que a transformada de Laplace da função $f(t) = t$ é dada por $F(s) = \dfrac{1}{s^2}, \quad s > 0$.

Exemplo 4: Mostre que a transformada de Laplace da função $f(t) = t^2$ é dada por $F(s) = \dfrac{2}{s^3}, \quad s > 0$.

Exemplo 5: Mostre que a transformada de Laplace da função $f(t) = t^3$ é dada por $F(s) = \dfrac{6}{s^4}, \quad s > 0$.

Exemplo 6: Mostre que a transformada de Laplace da função $f(t) = t^n$ é dada por $F(s) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$.

Cálculo Diferencial e Integral IV

Exemplo 7: a) Mostre que a transformada de Laplace da função $f(t) = e^{iat}$ é dada por $F(s) = \dfrac{1}{s - ia}, \quad s > a$.

b) Conclua que a transformada de Laplace da função $f(t) = \cos(at)$ é dada por

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > a$$

c) Conclua que a transformada de Laplace da função $f(t) = sen(at)$ é dada por

$$F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > a$$

Propriedades da Transformada

Homogeneidade:

$$L(Af)(s) = A\,L(f)(s)$$

Exemplo:

$$L(5)(s) = 5\,L(1)(s) = 5\times\frac{1}{s} = \frac{5}{s}, \quad s>0$$

Aditividade:

$$L(f + g)(s) = L(f)(s) + L(g)(s)$$

Exemplo:

$$L(e^{t} + e^{-t})(s) = L(e^{t})(s) + L(e^{-t})(s) =$$

$$\frac{1}{s - 1} + \frac{1}{s + 1} = \frac{2s}{s^{2} - 1}$$

Linearidade (Teorema da Linearidade):

$$L(Af+Bg)(s) = AL(f)(s)+BL(g)(s)$$

Exemplo:

$$L(5e^{t} + 4e^{-t})(s) = 5L(e^{t})(s) + 4L(e^{-t})(s) =$$

$$\frac{5}{s-1} + \frac{4}{s+1} = \frac{9s+1}{s^{2}-1}$$

Exemplo 9: Calcule a transformada de Laplace da função

$$f(t) = 5t^2 - 4t + 8, \quad t > 0.$$

$$L(f)(s) = L(5t^2 - 4t + 8)(s) =$$

$$= 5L(t^2)(s) - 4L(t)(s) + 8L(1)(s) =$$

$$= 5\times\frac{2}{s^3} - 4\times\frac{1}{s^2} + 8\times\frac{1}{s}$$

Exemplo 10: Calcule a transformada de Laplace da função $f(t) = 3\cos t + 5\,sen\,t, \quad t > 0.$

$$L(f)(s) = L(3\cos t + 5\,sen\,t)(s) =$$

$$= 3L(\cos t)(s) + 5L(sen\,t)(s)$$

Deslocamento (Teorema do deslocamento):

Se $g(t)=e^{at} f(t)$, $F(s) = L(f)(s)$ e $G(s) = L(g)(s)$, então $G(s) = F(s-a)$

Exemplo 11: Usando o teorema anterior mostre que a transformada de Laplace de $f(t)=e^{bt}\cos(at)$ é dada por

$$F(s) = \frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$$

Exemplo 12: Usando o teorema anterior mostre que a transformada de Laplace de $f(t) = e^{bt} sen(at)$ é dada por

$$F(s) = \frac{a}{(s - b)^2 + a^2}$$

Exemplo 13: Usando o teorema anterior mostre que a transformada de Laplace de $f(t) = \cosh(at) = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$ é dada por

$$F(s) = \frac{s}{s^2 - a^2}$$

Exemplo 14: Usando o teorema anterior mostre que a transformada de Laplace de $f(t) = senh(a\,t) = \dfrac{e^{a\,t} - e^{-a\,t}}{2}$ é dada por

$$F(s) = \frac{a}{s^2 - a^2}$$

Exemplo 15: Determine a função $f(t)$ cuja transformada de Laplace é $F(s) = \dfrac{s+3}{s^2 - 3s+2}$

Exemplo 16: Determine a função $f(t)$ cuja transformada de Laplace é $F(s) = \dfrac{s - 3}{s^2 + 4s+4}$

Derivação da Transformada

Teorema: Suponha que $f:(0,\infty)\to R$ seja derivável com $f\,'(t)$ contínua. Então

$$L(f\,')(s) = s\,F(s) - f(0)$$, em que $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$.

Cálculo Diferencial e Integral IV

Exemplo 17: Sabendo que $L(\cos t)(s) = \dfrac{s}{s^2 + 1}$

determine a transformada de Laplace da função $f(t) = sen\, t$.

$$f'(t) = \cos t$$

$$L(f')(s) = sF(s) - f(0)$$

$$L(\cos t)(s) = sF(s) - 0$$

$$\frac{s}{s^2 + 1} = sF(s) \quad \Rightarrow \quad F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

Cálculo Diferencial e Integral IV

Teorema: Suponha que $f:(0,\infty)\to R$ seja derivável duas vezes com $f''(t)$ contínua. Então

$$L(f'')(s) = s^2 F(s) - s f(0) - f'(0) \; ,$$

em que $F(s)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$.

Cálculo Diferencial e Integral IV

Exemplo 18: Seja $f(t) = t\,sen(at)$. Encontre $F(s)$.

$$f'(t) = sen(at) + at\cos(at)$$

$$f''(t) = a\cos(at) + a\cos(at) - a^2 t\,sen(at)$$

$$f''(t) = 2a\cos(at) - a^2 f(t)$$

$$L(f'')(s) = 2a\,L(\cos(at))(s) - a^2 L(f)(s)$$

$$s^2F(s) - s\,f(0) - f'(0) = \frac{2as}{s^2 + a^2} - a^2F(s)$$

$$s^2F(s) + a^2F(s) = \frac{2as}{s^2 + a^2}$$

Cálculo Diferencial e Integral IV

$$(s^2 + a^2)F(s) = \frac{2as}{s^2 + a^2}$$

$$F(s) = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$$

Exemplo 19: Seja $f(t) = t\cos(at)$. Encontre $F(s)$.

Exemplo 20: Resolver o seguinte problema de valor inicial

$$y'' - 5y' + 4y = 3e^t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Aplicando-se a transformada de Laplace a equação acima obtemos:

$$s^2 F(s) - s\,y(0) - y'(0) - 5(s F(s) - y(0)) + 4F(s) =$$

$$= \frac{3}{s - 1} \qquad \Rightarrow$$

$$s^2 F(s) - s - 5 s F(s) + 5 + 4F(s) = \frac{3}{s - 1}$$

$$(s^2 - 5s + 4)F(s) = \frac{3}{s - 1} + s - 5$$

$$(s - 1)(s - 4)F(s) = \frac{3}{s - 1} + s - 5$$

$$F(s) = \frac{3}{(s-1)^2(s-4)} + \frac{s-5}{(s-1)(s-4)}$$

$$F(s) = \frac{s^2 - 6s + 8}{(s-1)^2(s-4)}$$

$$F(s) = \frac{A}{(s-1)^2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s-4}$$

$$s^2 - 6s + 8 = A(s-4) + B(s-1)(s-4) + C(s-1)^2$$

$$s^2 - 6s + 8 = A(s-4) + B(s^2 - 5s + 4) + C(s^2 - 2s + 1)$$

Cálculo Diferencial e Integral IV

$$s^2 - 6s + 8 = (B + C)s^2 + (A - 5B - 2C)s - 4A + 4B + C$$

$$\begin{cases} B + C = 1 \\ A - 5B - 2C = -6 \\ -4A + 4B + C = 8 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \frac{-1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1} + \frac{0}{s-4}$$

$$F(s) = \frac{-1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1}$$

$$y(t) = -e^t t + e^t$$

Cálculo Diferencial e Integral IV

“A cada dia que vivo, mais me convenço de que o desperdício da vida está no amor que não damos, nas forças que não usamos, na prudência egoísta que nada arrisca, e que, esquivando-se do sofrimento, perdemos também a felicidade. A dor é inevitável. O sofrimento é opcional.”

Carlos Drummond de Andrade