# Cálculo Diferencial e Integral IV

Curso de

Engenharia

Civil

Período 2015.2

Prof. da Disciplina

Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

# Cálculo Diferencial e Integral IV

**E-mails:**


damasceno12@hotmail.com
damasceno12@uol.com.br
damasceno1204@yahoo.com.br


Site:

www.damasceno.info
damasceno.info

# Cálculo Diferencial e Integral IV

"A compaixão tem pouco valor se permanece uma ideia; ela deve tornar-se nossa atitude em relação aos outros, refletida em todos os nossos pensamentos e ações."

"A felicidade é um estado de espírito. Se a sua mente ainda estiver num estado de confusão e agitação, os bens materiais não vão lhe proporcionar felicidade. Felicidade significa paz de espírito"

Dalai Lama

# Cálculo Diferencial e Integral IV

## Funções Homogêneas

Uma função $F$ é chamada homogênea de grau $n$ se

$F(tx, ty) = t^n F(x, y)$ para to t real.

Exemplos:

1) $F(x, y) = x^2 + y^2$ é homogênea de grau 2 pois

$$F(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2x^2 + t^2y^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2 F(x, y)$$

2) $F(x, y) = \dfrac{x^2}{y^2}$ é homogênea de grau 0.

3) $f(x) = 4x^3$ é é homogênea de grau 3.

4) $F(x, y, z) = x^2 y z \, sen\left(\dfrac{y}{z}\right)$ é homogênea de grau 4.

## Equações Diferenciais Homogêneas

Uma equação diferencial ordinária é homogênea de primeira ordem se ela é da forma $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ , e $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ são funções homogêneas de mesmo grau.

Exemplo: 1) $x^2\,dy - (2x+y)\,y\,dx = 0$

$P(x,y) = -(2x+y)\,y$ é homogênea de grau 2, pois

$$P(tx,ty) = -(2tx+ty)\,ty = -t^2(2x+y)\,y = t^2 P(x,y)$$

# Cálculo Diferencial e Integral IV

$Q(x,y)=x^2$ é homogênea de grau 2, pois

$$Q(tx,ty) = (tx)^2 = t^2x^2 = t^2Q(x,y)$$

Método de solução:

$$y=xv$$

$$dy=x\,dv+v\,dx$$

$$x^2(x\,dv+v\,dx)-(2x+xv)xv\,dx=0$$

$$x^3dv+x^2v\,dx\ -2x^2v\,dx\ -x^2v^2dx = 0$$

$$x^3dv\ -x^2v\,dx\ -x^2v^2dx = 0$$

$$x^3dv-x^2(v+v^2)dx = 0$$

# Cálculo Diferencial e Integral IV

$$x^3\,dv = x^2(v+v^2)\,dx$$

$$\frac{dv}{v(1+v)} = \frac{x^2\,dx}{x^3}$$

$$\frac{dv}{v(1+v)} = \frac{dx}{x} \qquad (*)$$

$$\frac{1}{v(1+v)} = \frac{A}{v} + \frac{B}{1+v}$$

$$1 = A(1+v) + Bv$$

$$A+B = 0 \quad \text{e} \quad A = 1$$

$$A = 1 \quad \text{e} \quad B = -1$$

# Cálculo Diferencial e Integral IV

$$(*) \quad \frac{dv}{v} - \frac{dv}{1+v} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} - \int \frac{dv}{1+v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln(v) - \ln((1+v)) = \ln(x) + C$$

$$\ln\left(\frac{v}{1+v}\right) = \ln(Cx)$$

$$\frac{v}{1+v} = Cx$$

$$v = Cx(1+v) \qquad \frac{y}{x} = Cx\left(1+\frac{y}{x}\right)$$

# Cálculo Diferencial e Integral IV

Exemplo: 2) Resolver a equação diferencial

$$y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$$

$P(x,y) = x^2+y^2$ é homogênea de grau 2, pois

$P(xt,yt) = x^2t^2+y^2t^2 = t^2(x^2+y^2) = t^2 P(x,y)$

$Q(x,y) = xy$ é homogênea de grau 2, pois

$Q(xt,yt) = t^2 xy = t^2 Q(x,y)$

Portanto, $y' = \dfrac{x^2+y^2}{xy}$ é uma equação diferencial

homogênea.

# Cálculo Diferencial e Integral IV

Solução: $y = xv$

$$dy = x\,dv + v\,dx$$

$$xv' + v = \frac{x^2 + x^2 v^2}{x^2 v}$$

$$xv' + v = \frac{1+v^2}{v}$$

$$xv' + v = \frac{1}{v} + v$$

$$xv' = \frac{1}{v} \quad <=> \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v}$$

$$v\,dv = \frac{dx}{x}$$

# Cálculo Diferencial e Integral IV

$$\int v\,dv = \;=\; \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{v^2}{2} = \ln x + A$$

$$v^2 = 2\ln x + B$$

$$\frac{y^2}{x^2} = 2\ln x + B$$

$$y^2 = x^2(2\ln x + B)$$

# Cálculo Diferencial e Integral IV

Exercícios: 1) Encontre a solução geral da seguinte equação:

$$y' = \frac{2x-y}{y}$$

2) Resolver a seguinte equação diferencial

$$x\,dy-(x+y)\,dx = 0 \quad .$$

3) Resolver a equação diferencial

$$2y - xy' = 0 \quad .$$

4) Encontre uma solução particular da equação

$$x^2\,dy = (x^2+xy+y^2)\,dx \quad .$$

5) Resolver a equação diferencial

$$(x^2 - 3y^2)\,dx+2xy\,dy=0, \quad x>0$$

## Equações diferenciais exatas

Sejam $M(x, y)$, $N(x, y)$, funções continuas com derivadas parciais de primeira ordem continuas em uma região retangular $R$ : $a < x < b$; $c < y < d$, e suponha também uma função $F$ de duas variáveis reais, de forma que $F$ tenha derivadas parciais continuas.

A diferencial total $dF$ é defenida por

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\,dy$$

A diferencial

$$dF = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$ é

chamada de diferencial exata em uma região R, se existir uma função $F(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$$

# Cálculo Diferencial e Integral IV

Uma equação diferencial da forma $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ é chamada exata se a expressão do lado esquerdo, $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ é uma diferencial exata. Ou seja, existe uma função $F(x,y)$ tal que $dF(x,y) = M(x,y)dx+N(x,y)dy$. Nesse caso, a solução da equação é $F(x, y) = C$.

# Cálculo Diferencial e Integral IV

Teorema: Se $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy$ é uma diferencial exata, a equação $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ é exata, se e somente se,

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$

Exemplos: 1) Mostre que $(2x+y^2)\,dx+2xy\,dy=0$ é uma diferencial exata.

2) Mostre que $x^2y^3\,dx+x^3y^2\,dy=0$ é uma diferencial exata.

# Cálculo Diferencial e Integral IV

Resolução: Para resolvermos a equação diferencial exata basta resolvermos as duas equações diferenciais

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$$

Exemplos: 1) Resolver a equação

$$(2x+y^2)dx+2xy\,dy=0$$

$$M(x,y)=2x+y^2 \qquad \text{e} \qquad N(x,y)=2xy \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 2y \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 2y$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$

Logo, $(2x+y^2)dx+2xy\,dy=0$ é uma equação diferencial exata.

Resolução: $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 2x+y^2$

$$F(x,y)=\int (2x+y^2)dx+C(y)$$

$$F(x,y)=x^2+y^2x+C(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2xy$$

$$2xy+C'(y) = 2xy$$

$$C'(y)=0$$

# Cálculo Diferencial e Integral IV

$$C(y) = C$$

$$F(x, y) = x^2 + y^2 x + C$$

Portanto, a solução da equação é

$F(x, y) = C$ , isto é, $x^2 + y^2 x = C$

2) Resolver a equação $x^2 y^3 dx + x^3 y^2 dy = 0$

$M(x, y) = x^2 y^3$ e $N(x, y) = x^3 y^2$

$\dfrac{\partial M}{\partial y}(x, y) = 3x^2 y^2$ e $\dfrac{\partial N}{\partial x}(x, y) = 3x^2 y^2$

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y)$$

# Cálculo Diferencial e Integral IV

Logo, $x^2 y^3 dx + x^3 y^2 dy = 0$ é uma equação diferencial exata.

Resolução: $$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = x^2 y^3$$

$$F(x, y) = \int x^2 y^3 dx + C(y)$$

$$F(x, y) = \frac{x^3 y^3}{3} + C(y)$$

# Cálculo Diferencial e Integral IV

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = x^3 y^2$$

$$x^3 y^2 + C'(y) = x^3 y^2$$

$$C'(y) = 0$$

$$C(y) = C$$

$$F(x,y) = \frac{x^3 y^3}{3} + C$$

Portanto, a solução da equação é

$$\frac{x^3 y^3}{3} = C$$

# Cálculo Diferencial e Integral IV

Algorítmo para resolução de equações exatas:

1) Integrar $M(x, y)$ em relação a $x$;

2) Diferenciar a função resultante em relação a $y$ e igualar a $N(x, y)$;

3) Obter $C(y)$ integrando em relação a $y$;

4) Substituir $C(y)$ na equação encontrada após o primeiro passo e encontrar $F(x, y)$.

# Cálculo Diferencial e Integral IV

Exemplo: 1) Resolva a equação diferencial

$$(2x-1)\,dx+(3y+7)\,dy = 0$$

$$M(x,y)=2x-1 \quad => \quad \frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 0$$

$$N(x,y)=3y+7 \quad => \quad \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 0$$

$\dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y)$ , logo a equação é exata.

# Cálculo Diferencial e Integral IV

Passo 1) $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2x - 1$

$$F(x, y) = \int (2x - 1)\,dx + C(y)$$

$$F(x, y) = x^2 - x + C(y)$$

Passo 2) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$

$$C'(y) = 3y + 7$$

Passo 3) $C(y) = \int (3y + 7)\,dy = \dfrac{3}{2}y^2 + 7y$

Passo 4) $F(x, y) = x^2 - x + \dfrac{3}{2}y^2 + 7y$

Solução: $x^2 - x + \dfrac{3}{2}y^2 + 7y = C$

2) Resolva a equação diferencial

$$\left(y\cos x+2\,x\,e^{y}\right)+\left(sen\,x+x^{2}e^{y}-1\right)y\,' \;=\; 0$$

$$\left(y\cos x+2\,x\,e^{y}\right)+\left(sen\,x+x^{2}e^{y}-1\right)y\,' \;=\; 0$$

$$\left(y\cos x+2\,x\,e^{y}\right)d\,x+\left(sen\,x+x^{2}e^{y}-1\right)d\,y \;=\; 0$$

$$M\left(x\,,y\right) \;=\; y\cos x+2\,x\,e^{y} \quad \text{e} \quad N\left(x\,,y\right) \;=\; sen\,x+x^{2}e^{y}-1$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}\left(x,\,y\right)=\cos x+2\,x\,e^{y} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial N}{\partial x}\left(x,\,y\right) \;=\; \cos x+2\,x\,e^{y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}\left(x\,,y\right) \;=\; \frac{\partial N}{\partial x}\left(x\,,y\right)$$

# Cálculo Diferencial e Integral IV

Logo, $\quad (y\cos x + 2xe^{y})\,dx + (sen\,x + x^{2}e^{y} - 1)\,dy = 0$

é uma equação diferencial exata.

Passo 1) $\quad \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = y\cos x + 2xe^{y}$

$$F(x,y) = \int (y\cos x + 2xe^{y})\,dx + C(y)$$

$$F(x,y) = y\,sen\,x + x^{2}e^{y} + C(y)$$

Passo 2) $\quad \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$

$$sen\,x + x^{2}e^{y} + C'(y) = sen\,x + x^{2}e^{y} - 1$$

$$C'(y) = -1$$

# Cálculo Diferencial e Integral IV

Passo 3) $C(y) = \int -1\, dy = -y$

Passo 4) $F(x, y) = y\, sen\, x + x^2 e^y - y$

Solução: $y\, sen\, x + x^2 e^y - y = C$

3) Resolva a equação diferencial

$$(1 - 2x^2 - 2y)\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 4xy$$

# Cálculo Diferencial e Integral IV

"Determinação, coragem e autoconfiança são fatores decisivos para o sucesso. Não importa quais sejam os obstáculos e as dificuldades. Se estamos possuídos de uma inabalável determinação, conseguiremos superá-los. Independentemente das circunstâncias, devemos ser sempre humildes, recatados e despidos de orgulho."

Dalai Lama