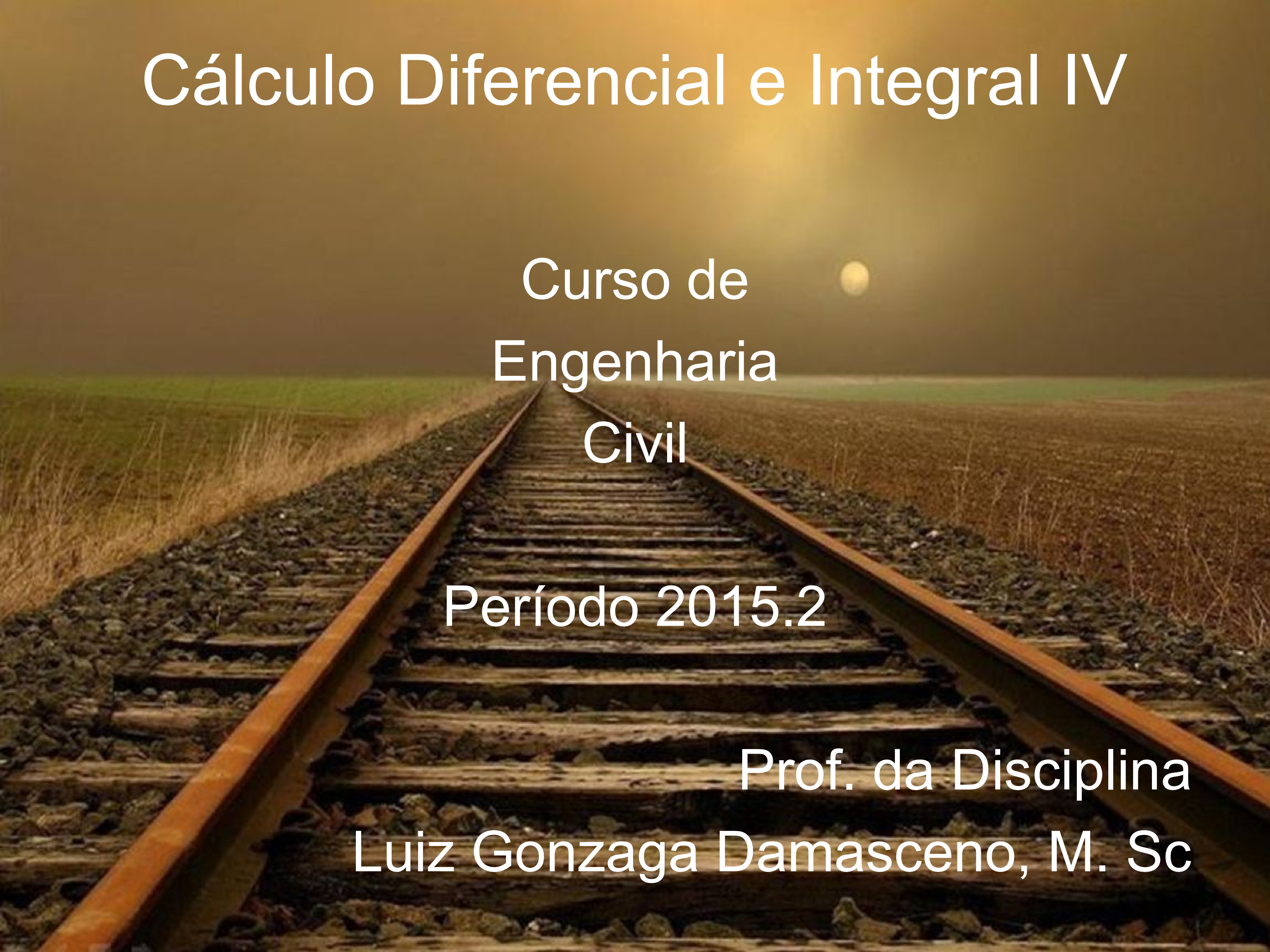

Cálculo Diferencial e Integral IV

Curso de
Engenharia
Civil

Período 2015.2

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Cálculo Diferencial e Integral IV

E-mails:

damasceno12@hotmail.com
damasceno12@uol.com.br
damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info
damasceno.info

Cálculo Diferencial e Integral IV

"Quando morremos, nada pode ser levado conosco, com a exceção das sementes lançadas por nosso trabalho e do nosso conhecimento."

"Dê a quem você ama asas para voar, raizes para voltar e motivos para ficar."

Dalai Lama

Cálculo Diferencial e Integral IV

Variáveis separáveis

Vamos supor que $F(x, y, y') = 0$ possa ser escrita na forma $M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$ ou $N(y)\,dy = M(x)\,dx$. Então $F(x, y, y') = 0$ é dita separável ou de variáveis separáveis. Podemos resolvê-la aplicando integração direta a ambos os membros da igualdade.

$$\int N(y)\,dy = \int M(x)\,dx + C$$

Cálculo Diferencial e Integral IV

Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \quad \text{sujeita a condição inicial} \quad y(0) = 1$$

Pelo método de separação de variáveis

$$dy = y^2 dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y^2} = dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dx \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{y} = x + C$$

$$y = \frac{-1}{x+C}$$

$$y(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{-1}{C}$$

$$\Rightarrow \quad C = -1 \quad \text{Portanto,} \quad y = \frac{-1}{x-1}$$

Cálculo Diferencial e Integral IV

Exemplos: 1) Resolva a seguinte equação diferencial $(1+x)\,dx - y\,dy = 0$

$$(1+x)\,dx - y\,dy = 0$$

$$(1+x)\,dx = y\,dy$$

$$\int (1+x)\,dx = \int y\,dy$$

$$x + \frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C \qquad \text{ou} \qquad 2x + x^2 = y^2 + C$$

$$y^2 = 2x + x^2 + C$$

$$y = \sqrt{2x + x^2 + C} \qquad \text{ou} \qquad y = -\sqrt{2x + x^2 + C}$$

Cálculo Diferencial e Integral IV

2) Obtenha a solução da equação $y' = 1$ que passa pelo ponto (2, 3).

$$y' = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 1 \quad \Rightarrow \quad dy = dx$$

$$\Rightarrow \quad y = x + C$$

Como $y = 3$ se $x = 2$ obtemos $3 = 2 + C$, logo $C = 1$. Portanto, a solução é $y = x + 1$.

Cálculo Diferencial e Integral IV

3) Resolva o problema de valor inicial

$\frac{dy}{dx}=\cos\left(\frac{x}{4}\right)$ sujeito a condição inicial $y(0)=\frac{\pi}{4}$.

$$\frac{dy}{dx}=\cos\left(\frac{x}{4}\right) \quad => \quad dy=\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx \quad =>$$

$$y=4\int \cos\left(\frac{x}{4}\right)\frac{1}{4}dx \quad => \quad y=4sen\left(\frac{x}{4}\right)+C$$

Como $y(0)=\frac{\pi}{4}$ obtemos $\frac{\pi}{4}=4\,sen(0)+C$

Logo $C=\frac{\pi}{4}$ e $y=4sen\left(\frac{x}{4}\right)+\frac{\pi}{4}$

Cálculo Diferencial e Integral IV

4) A taxa de desintegração (perda de massa) de uma substância radioactiva é proporcional à massa que fica. Isto é, se $x(t)$ representa a massa existente num instante t, tem-se

$\frac{dx}{dt} = -kx$, sendo k uma constante positiva, característica da substância. Sabendo-se que $k = 0{,}015$ e no instante $t = 0$, $x(0) = 2$, determine: a) a massa existente num instante t; b) a massa existente num instante $t = 100$; c) a massa existente num instante $t = 1000$.

Cálculo Diferencial e Integral IV

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

$$\frac{dx}{x} = -k\,dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int -k\,dt$$

$$\ln x = -kt + A$$

$$x = e^{-kt+A} = Be^{-kt}$$

Cálculo Diferencial e Integral IV

$$2 = B\,e^{-0{,}015\,x\,0} \qquad => \qquad B = 2$$

a) $x = 2\,e^{-0{,}015\,t}$

b) $t = 100$ => $x = 2\,e^{-1{,}50} = 0{,}4462$

c) $t = 1000$ => $x = 2\,e^{-15} = 6{,}1181\,x\,10^{-7}$

5) Sabendo que em uma população isolada com P indivíduos, o número de contaminados por uma doença no instante t, $x(t)$, varia em uma taxa proporcional ao número de indivíduos contaminados (P) e não-contaminados ($P - x(t)$), escrever e resolver a equação diferencial ordinária associada a este problema.

$$\frac{dx}{dt} = kx(P - x)$$

Cálculo Diferencial e Integral IV

$$\frac{dx}{x(P-x)} = k\,dt$$

$$\int \frac{dx}{x(P-x)} = \int k\,dt$$

$$\frac{1}{x(P-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{P-x} \qquad \Rightarrow$$

$$A(P-x) + Bx = 1 \qquad \Rightarrow$$

$$(B-A)x + AP = 1 \qquad \Rightarrow$$

$$B - A = 0 \quad \text{e} \quad AP = 1$$

Portanto, $A = B = \dfrac{1}{P}$

Cálculo Diferencial e Integral IV

$$\int \frac{dx}{x(P-x)} = \int \frac{1}{P}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{P-x}\right)dx$$

Resolvendo a integral, temos:

$$\ln x - \ln(P-x) = KPt + \ln C$$

$$\ln \frac{x}{P-x} = \ln\left(Ce^{KPt}\right)$$

$$\frac{x}{P-x} = Ce^{KPt} \quad \text{ou} \quad x = \frac{PCe^{KPt}}{1+Ce^{KPt}}$$

Cálculo Diferencial e Integral IV

Exercícios:

1) Determine a solução da equação diferencial $y' = x y$.

2) Determine a solução da equação diferencial $x\,dy - y\,dx = 0$.

3) Determine a solução da equação diferencial $(1-y)(2-y)\,dx - dy = 0$

4) Determine a solução da equação diferencial $(1+x+y^2+x y^2)\,dx - dy = 0$

Cálculo Diferencial e Integral IV

Exercícios:

5) Determine a solução da equação diferencial $y' + y^2 \, sen\, x = 0$.

6) Determine a solução da equação diferencial $(1+2y^2)\,dy - y\cos x\,dx = 0$

7) Um modelo real simples da troca de calor entre um corpo e o meio ambiente onde está situado admite três hipóteses básicas:

1. A temperatura $T = T(t)$ depende do tempo e é a mesma em todos os pontos do corpo.

Cálculo Diferencial e Integral IV

2. A temperatura Tm do meio ambiente permanece constante no decorrer da experiência.

3. A taxa de variação da temperatura com relação ao tempo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente.

Escrever e resolver a equação diferencial ordinária associada a este problema.

Sugestão: $$\frac{dT}{dt} = -k(T - Tm)$$

Cálculo Diferencial e Integral IV

8) Considere um corpo de massa m caindo na atmosfera. Se desprezarmos a resistência do ar, chame de v sua velocidade em um determinado instante t e de a sua aceleração. Determine as equações da velocidade e da posição do objeto em cada instante t.

Pela segunda lei de Newton teremos:

$$F=mg \quad \Rightarrow \quad ma=mg \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dv}{dt}=g \quad \Rightarrow \quad v=gt+C$$

Se o objeto partiu do repouso, $v(0)=0$. Então, C = 0.

Logo $v=gt$.

Cálculo Diferencial e Integral IV

Se o objeto partiu com uma velocidade inicial $v(0)=v_0$, então $C=v_0$. Logo $v=g\,t+v_0$.

Chamando $x(t)$ a posição do objeto em cada instante t, temos que

$$\frac{dx}{dt}=v=g\,t+v_0 \qquad => \qquad x=\frac{1}{2}g\,t^2+v_0\,t+C$$

Considere a condição inicial $x(0)=x_0$. Determine C e ache $x(t)$.

Cálculo Diferencial e Integral IV

9) Um paraquedista, pesando 70 kg, salta de um avião e abre o paraquedas após 10 s. Antes da abertura do paraquedas, o seu coeficiente de atrito é $k = 5$ kg s^{-1}, depois é $k = 100$ kg s^{-1}.

a) Qual a velocidade do paraquedista no instante em que se abre o paraquedas?

b) Qual a distância percorrida em queda livre?

c) Qual a velocidade mínima que o paraquedista poderá atingir após a abertura do paraquedas?

Cálculo Diferencial e Integral IV

Dicas: $m\frac{dv}{dt}=mg-kv$

$$\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g$$

e $\quad v=\frac{dx}{dt}$

Cálculo Diferencial e Integral IV

"Os homens me surpreendem... os homens perdem a saúde para juntar dinheiro, depois perdem dinheiro para recuperar a saúde; e por pensarem ansiosamente no futuro, esquecem do presente de tal forma que acabam por não viver o presente nem o futuro; e vivem como se nunca fossem morrer e, morrem como se nunca tivessem vivido. Então busquemos o equilíbrio, a harmonia!"

Dalai Lama