# Cálculo Diferencial e Integral IV

Curso de
Engenharia
Civil

Período 2015.2

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

# Cálculo Diferencial e Integral IV

**E-mails:**

damasceno12@hotmail.com
damasceno12@uol.com.br
damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info
damasceno.info

# Cálculo Diferencial e Integral IV

"Algumas pessoas têm amor por você, outras têm raiva. O que sentem nem sempre depende de seu comportamento. As reações delas as vezes são justas, as vezes são injustas."

"Pouco importa o julgamento dos outros. Os seres são tão contraditórios que é impossível satisfazê-los. Tenha em mente simplesmente ser autêntico e verdadeiro."

Dalai Lama

# Cálculo Diferencial e Integral IV

## 1 Equações Diferenciais

### 1.1 Definições. Conceitos Básicos

Equação Diferencial

Chamamos de equação diferencial a uma equação que estabelece uma relação entre variáveis dependentes, suas derivadas em relação a uma ou mais variáveis independentes e estas variáveis independentes.

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Exemplos:

1) $y' - 4y = 0$

2) $y'' - 5y' + 4y = 3x + 2$

3) $2\dfrac{\partial z}{\partial x} + 3\dfrac{\partial z}{\partial y} = 5x + 4y$

Uma equação diferencial simples é $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$. Para determinarmos uma solução desta equação devemos encontrar uma função $y(x)$ tal que sua derivada, $\dfrac{dy}{dx}$, seja igual a $f(x)$.

# Cálculo Diferencial e Integral IV

O teorema fundamental do cálculo nos dá a solução desta equação na forma

$$d\,y = f(x)\,d\,x$$

$$y(x) = \int f(x)\,dx + C$$

# Cálculo Diferencial e Integral IV

Um outro exemplo simples de uma equação diferencial é

$\dfrac{dy}{dx} = ky$ onde $k$ é uma constante. A variável dependente é $y$

e a variável independente é $x$. A equação envolve $x$, $y$ e $\dfrac{dy}{dx}$ ; e

por esta razão é chamada de uma equação diferencial. Do cálculo

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

$$\frac{dy}{y} = k\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\,dx$$

$$\ln y = kx + A$$

$$y = Be^{kx}$$

Por verificação:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}Be^{kx} = Bke^{kx} = ky$$

A constante $B$ é determinada mediante uma condição inicial, que neste caso seria dar o valor de $y(x)$ num determinado ponto $x_0$.

Por exemplo, se impormos a condição inicial $y(0) = 3$, então a constante $B$ é agora determinada, ou seja, B = $3$.

$$y = B e^{kx}$$

$$3 = B e^{0}$$

$$B = 3$$

# Cálculo Diferencial e Integral IV

Exemplos:

1) $\dfrac{dy}{dx} = x + 2$ $\qquad y(0) = 1$

2) $y' - 5 = 0$ $\qquad y(2) = 5$

3) $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = x + y$ $\qquad z(0,1) = 5$

4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = k\,x^2 + y^2$ $\qquad z(0,1) = 5$

$w(2,5) = 15$

# Cálculo Diferencial e Integral IV

## Equação Diferencial Ordinária

Uma equação diferencial se diz ordinária quando envolver derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a apenas uma variável independente.

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação da forma $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ envolvendo uma variável independente $x$, uma variável dependente $y$ e suas derivadas.

# Cálculo Diferencial e Integral IV

Exemplos:

1) $y'(t) = e^t$

2) $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{dy}{dt} = x + y$

3) $y'' - 5y' + 4y = e^x$

4) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 5y\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y^2\dfrac{dy}{dx} = 5x^2 + 3x + 7$

# Cálculo Diferencial e Integral IV

## Equação Diferencial Parcial

Quando envolver derivadas parciais das variáveis dependentes em relação as variáveis independentes.

Exemplos: 1) $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=x+y$

2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2=k\,x^2+y^2$

Ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada mais elevada.

Exemplos: 1) $y' + y = 5$ é uma equação diferencial de 1ª ordem.

2) $y'' - 5y' + 4y = 0$ é uma equação diferencial de 2ª ordem.

3) $\dfrac{d^3 y}{d x^3} + \dfrac{d^2 y}{d x^2} + 5y = 0$ é uma equação diferencial de 3ª ordem.

# Cálculo Diferencial e Integral IV

Grau de uma equação diferencial é o valor do expoente para a derivada mais alta da equação, quando a equação tem a forma de um polinômio na função incógnita e em suas derivadas.

Exemplos: 1) $y''+3y'+6y=sen(x)$ tem ordem 2 e grau 1.

2) $y''+3yy'=e^x$ tem ordem 2 e grau 1.

3) $(y'')^3+3(y')^{10}+6y=tg(x)$ tem ordem 2 e grau 3.

## 1.2 Soluções de Equações Diferenciais

Chamamos de solução de uma equação diferencial a toda função que verifique a equação. A solução mais geral possível é chamada de solução geral, enquanto que outra solução é chamada de solução particular.

Exemplos: 1) $\frac{dy}{dx}=x+2$

$$y=\frac{x^2}{2}+2x \quad , \quad y=\frac{x^2}{2}+2x+5 \quad \text{e} \quad y=\frac{x^2}{2}+2x-18$$

são soluções particulares de (1)

# Cálculo Diferencial e Integral IV

$y = \frac{x^2}{2} + 2x + A$ é uma solução geral de (1)

2) $y' - 5 = 0$

$y = 5x$ e $y = 5x + 4$ são soluções particulares de (2)

$y = 5x + k$ é uma solução geral de (2)

3) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + y$

$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ é uma solução particular de (3)

$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + A$ é uma solução geral de (3)

# Cálculo Diferencial e Integral IV

Exemplos: 1) Mostre, por substituição, que

$y = C e^{4x}$ é solução de $y' - 4y = 0$

2) Mostre, por substituição, que

$y = e^{2x}$ é solução de

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

3) Mostre, por substituição, que

$y = e^{3x}$ é solução de

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

4) Mostre, por substituição, que

$y = A e^{2x} + B e^{3x}$ é solução de $y'' - 5y' + 6y = 0$

# Cálculo Diferencial e Integral IV

5) Mostre, por substituição, que

$y(x)=Ae^{4x}+Be^{-x}-\frac{1}{2}e^{2x}$ é solução de $y''-3y'-4y=3e^{2x}$

6) Determine o valor de $r$ que torna

$y=e^{rx}$ uma solução da equação diferencial $y''-\frac{1}{4}y=0$

7) Determine o valor de $r$ que torna

$y=e^{rx}$ uma solução da equação diferencial $y''+y'-2y=0$

8) Mostre, por substituição, que

$y=x\,tg(x+3)$ é solução da equação diferencial

$$xy'-y^2-y=x^2$$

## 1.3 Equações diferenciais de primeira ordem

Toda equação diferencial do tipo $F(x, y, y')=0$

Exemplos:

1) $y'=x+1$

2) $y'+2xy=3x^2$

3) $xy'+y\,sen\,x=e^x$

4) $y'=\cos(x+y)$

Equações diferenciais de primeira ordem:

variáveis separáveis;

homogêneas;

exatas;

lineares.

# Cálculo Diferencial e Integral IV

## Problema de valor inicial

Quando um determinado problema, além de uma equação diferencial que o descreve, tiver ainda que seguir certas condicões iniciais, estabelecidas pelo problema, para um mesmo valor da variável independente, dizemos que temos um problema de valor inicial (PVI).

Exemplos:

1) $F(x, y, y')=0$ onde $y(x_0)=y_0$

2) $F(x, y, y', y'')=0$ onde $y(x_0)=y_0$ , $y'(x_0)=y_1$

3) $F(x, y, y', y'', y''')=0$ onde

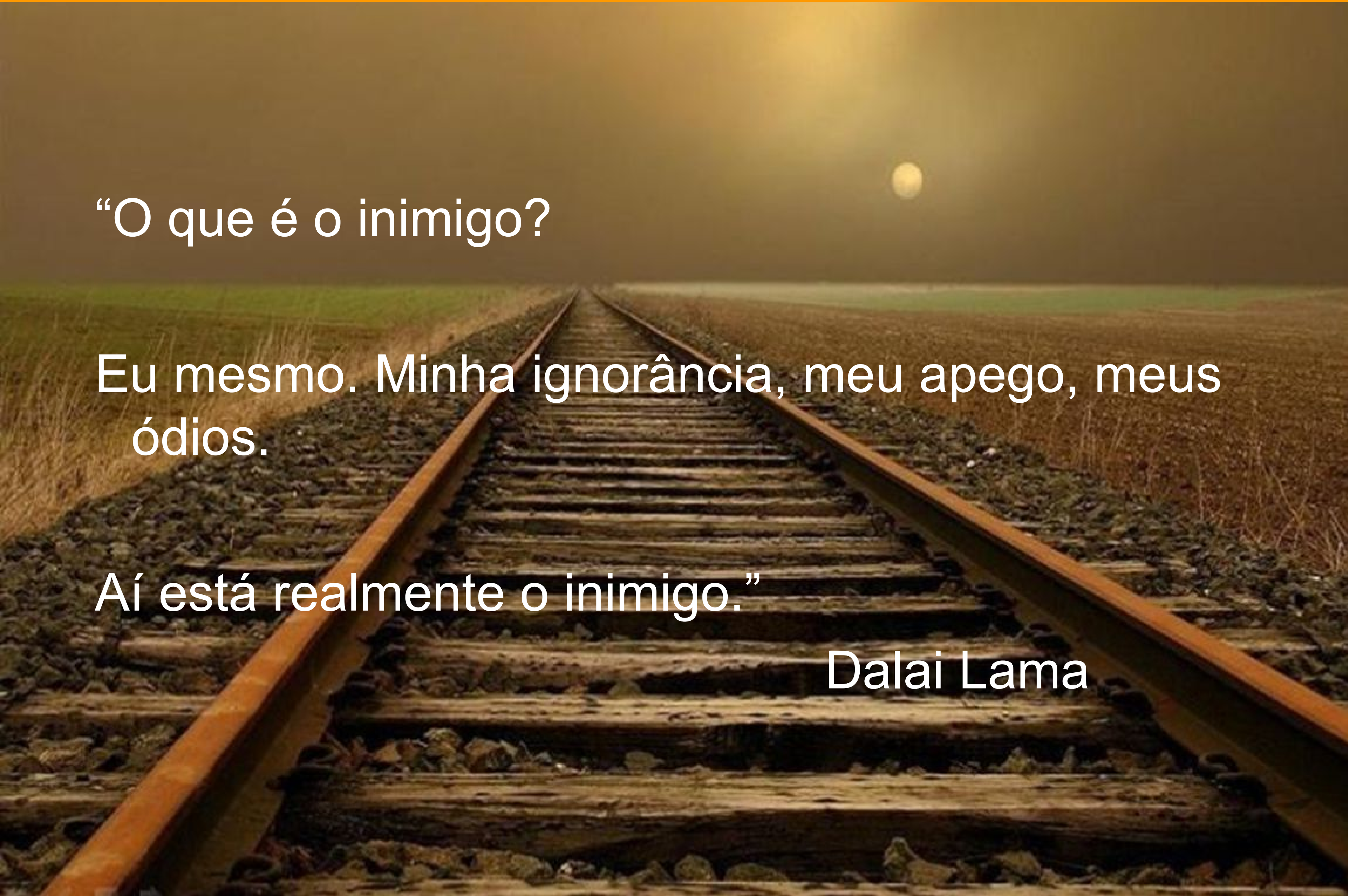
$$y(x_0)=y_0 \quad , \quad y'(x_0)=y_1 \quad , \quad y''(x_0)=y_2$$

Quando as condições iniciais se referirem a dois ou mais valores distintos da variável independente, dizemos que temos um problema de valor de fronteira (PVF).

4) $y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$

5) $y'' - 5y' + 4y = xe^x, \quad y(1) = 5, \quad y'(3) = 4$

# Cálculo Diferencial e Integral IV



"O que é o inimigo?

Eu mesmo. Minha ignorância, meu apego, meus ódios.

Aí está realmente o inimigo."

Dalai Lama