Cálculo Diferencial e Integral III

Curso de
Engenharia
Civil

Período 2016.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Cálculo Diferencial e Integral III

E-mails:

damasceno12@hotmail.com
damasceno12@uol.com.br
damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info
damasceno.info

Cálculo Diferencial e Integral III

"Na multidão de palavras não falta transgressão, mas o que modera os seus lábios é prudente."

"Uma regra simples de sabedoria é reduzir as suas palavras pela metade."

"Se você for lento e relutante para falar, você terá um excelente espírito."

Provérbios 10:19

1.1 Vetores no plano e no espaço

Produto vetorial: Dados vetores $\mathsf{U} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\mathsf{V} = (v_1, v_2, v_3)$ definimos o *produto vetorial* $\mathsf{U} \times \mathsf{V}$ como o vetor

$$\mathsf{U} \times \mathsf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

onde $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$.

1.1 Vetores no plano e no espaço

Produto vetorial:

$$\mathrm{U} \times \mathrm{V} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, 0, 0 \right) - \left(0, \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, 0 \right)$$

$$+ \left(0, 0, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

1.1 Vetores no plano e no espaço

Propriedades do Produto vetorial:

(1) O vetor $\mathsf{U} \times \mathsf{V}$ é ortogonal aos vetores U e V, isto é, $\mathsf{U} \cdot (\mathsf{U} \times \mathsf{V}) = \mathsf{V} \cdot (\mathsf{U} \times \mathsf{V}) = 0.$

$$\mathsf{U} \cdot (\mathsf{U} \times \mathsf{V}) =$$

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= u_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} =$$

Cálculo Diferencial e Integral III

1.1 Vetores no plano e no espaço

Propriedades do Produto vetorial:

$$= \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

(2) $\mathsf{U} \times \mathsf{V} = -\mathsf{V} \times \mathsf{U}$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}$$

1.1 Vetores no plano e no espaço

Propriedades do Produto vetorial:

(3) $\mathsf{U} \times \mathsf{U} = 0$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

(4) (U + V) x W = U x W + V x W

(5) (kU) x V = k(U x V), para todo k $\in \mathbb{R}$.

(6) U x V = 0 se, e somente se, os vetores U e V são paralelos (V = kU).

1.1 Vetores no plano e no espaço

Propriedades do Produto vetorial:

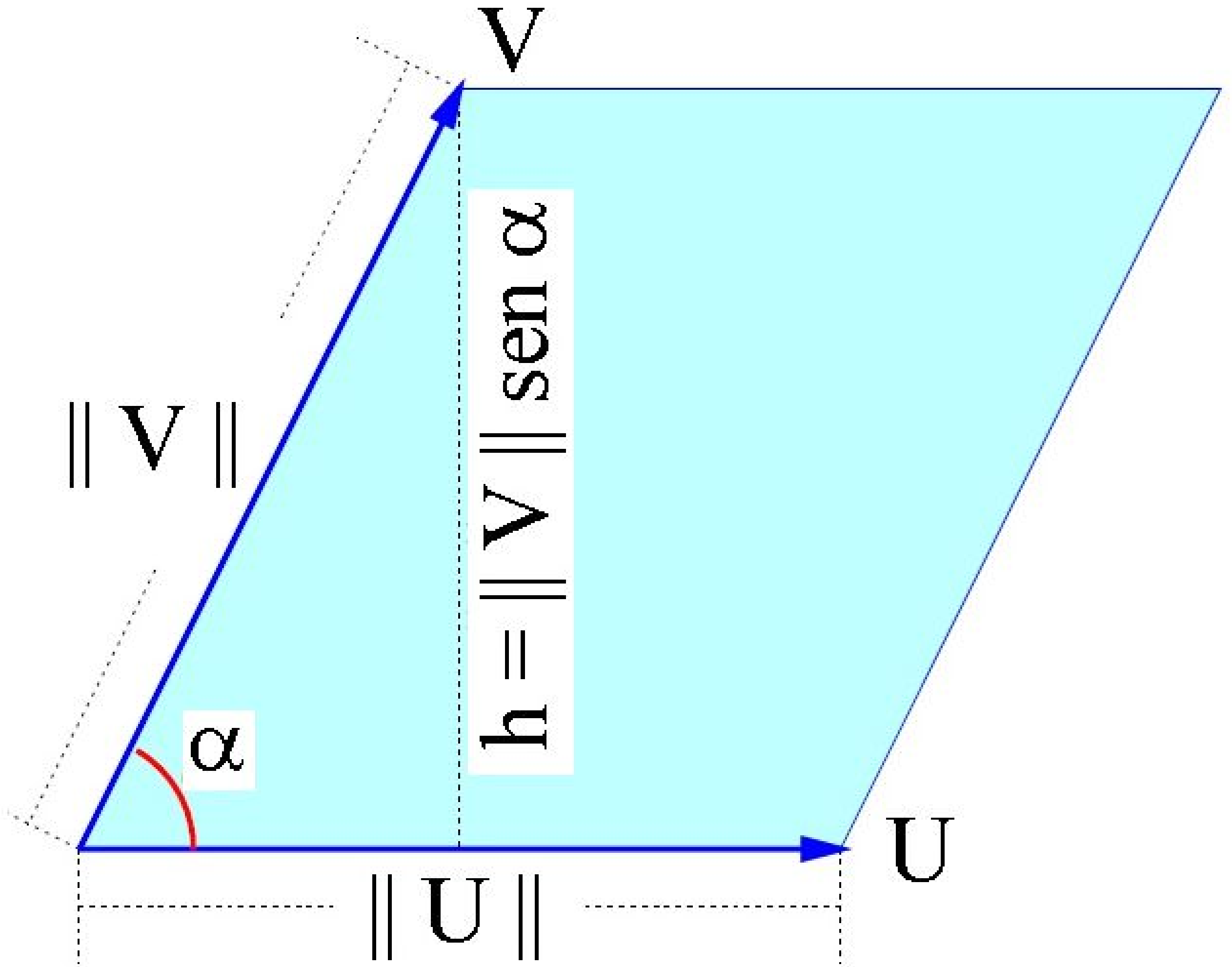
(7) O **módulo do produto vetorial** U x V é a área de um paralelogramo de lados U e V.

$$||U \times V|| = ||U||\,||V||\,\text{sen}\,\alpha,$$

onde α é o ângulo entre os vetores U e V.

1.1 Vetores no plano e no espaço

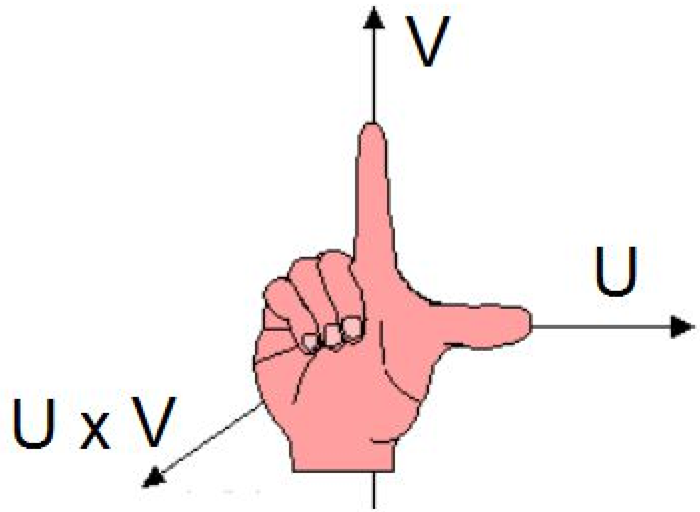
Propriedades do Produto vetorial:



1.1 Vetores no plano e no espaço

Propriedades do Produto vetorial:

Orientação do vetor U x V :



1.1 Vetores no plano e no espaço

Os **vetores canônicos**

$$\vec{i} = (1,0,0), \qquad \vec{j} = (0,1,0) \quad \text{e} \quad \vec{k} = (0,0,1)$$

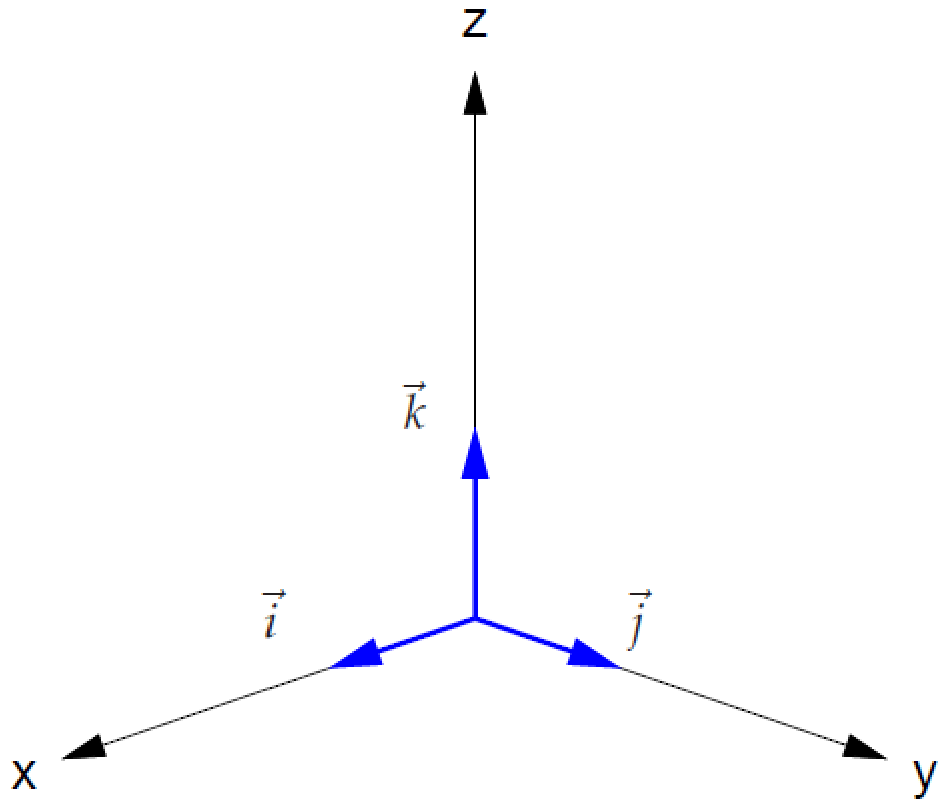
são vetores unitários (de norma igual a um) paralelos aos eixos coordenados. Todo vetor $V = (v_1, v_2, v_3)$ pode ser escrito como uma combinação linear de $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$

$$\begin{aligned} V = (v_1, v_2, v_3) = (v_1, 0, 0) + (0, v_2, 0) + (0, 0, v_3) = \\ = \quad v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1) = \\ = \quad v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j} + v_3\,\vec{k}. \end{aligned}$$

Cálculo Diferencial e Integral III

1.1 Vetores no plano e no espaço

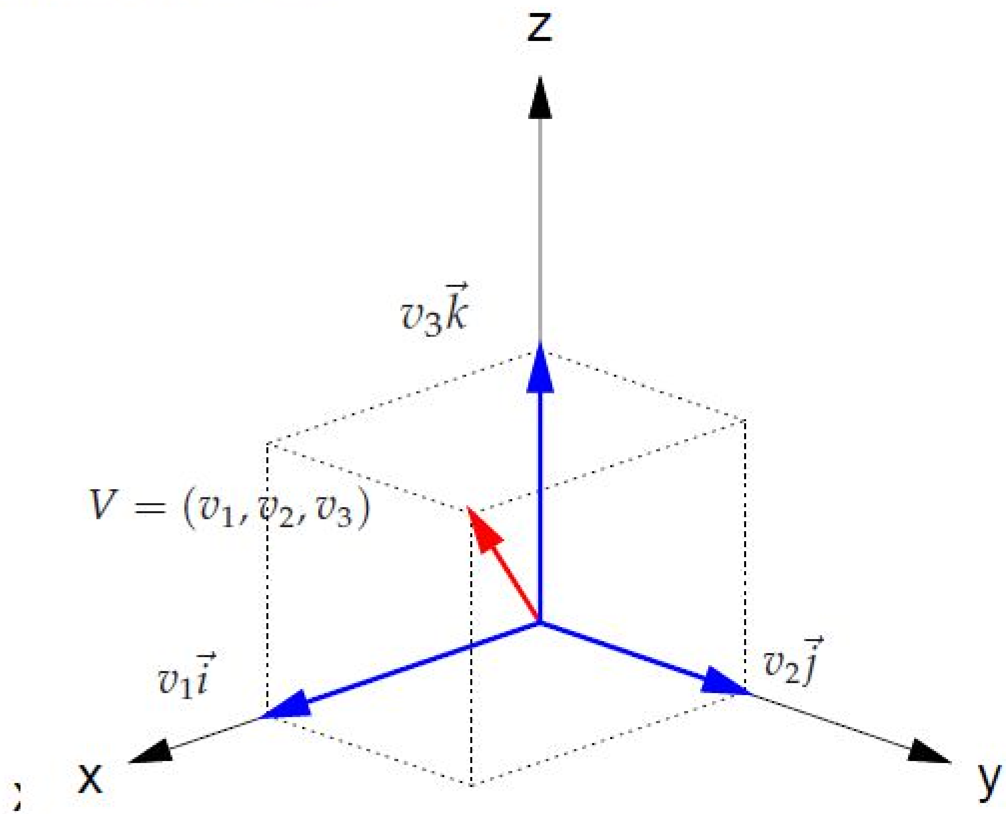
Os **vetores canônicos**



Vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$

1.1 Vetores no plano e no espaço

Os **vetores canônicos**



$$V = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$$

1.1 Vetores no plano e no espaço

Os **vetores canônicos**

$$\vec{i} \times \vec{i} = \bar{0}, \quad \vec{j} \times \vec{j} = \bar{0}, \quad \vec{k} \times \vec{k} = \bar{0},$$
$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j},$$
$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

Exemplo: Sejam $V = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$ e $W = 3\vec{i} + \vec{k}$.

Então

$$V \times W = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 7\vec{j} - 6\vec{k}$$
$$= (2, -7, -6)\,.$$

1.1 Vetores no plano e no espaço

Exemplo: *Determine a área do paralelogramo de vértices* $(0,0,0)$, $(1,2,3)$ *e* $(2,1,1)$.

A área é igual ao módulo do produto vetorial dos vetores $(1,2,3)$ e $(2,1,1)$. Temos que

$$(1,2,3)\times(2,1,1)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=(-1,5,-3).$$

$$\|(-1,5,3)\|=\sqrt{1+5^2+3^2}=\sqrt{35}.$$

Portanto, a área é $\sqrt{35}$.

1.1 Vetores no plano e no espaço

Exemplo: Vamos calcular a área do triângulo PQR em que

$$P = (3, 2, 0),\ \ Q = (0, 4, 3) \ \text{ e } \ R = (1, 0, 2).$$

$$V = \overrightarrow{RP} = (3 - 1, 2 - 0, 0 - 2) = (2, 2, -2)$$

$$W = \overrightarrow{RQ} = (0 - 1, 4 - 0, 3 - 2) = (-1, 4, 1)\,.$$

$$V \times W = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (10, 0, 10)$$

Cálculo Diferencial e Integral III

1.1 Vetores no plano e no espaço

Exemplo: Vamos calcular a área do triângulo PQR em que

$P = (3, 2, 0)$, $Q = (0, 4, 3)$ e $R = (1, 0, 2)$.

$$V \times W = (10, 0, 10) = 10(1, 0, 1).$$

$$||V \times W||^2 = 100 \; (1^2 + 0^2 + 1^2)$$

$$||V \times W|| = 10\sqrt{2}.$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}||V \times W|| = 5\sqrt{2}.$$

Cálculo Diferencial e Integral III

1.1 Vetores no plano e no espaço

Produto misto de três vetores: Dados três vetores de $\mathbb{R}^3$

$u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ e $w = (w_1, w_2, w_3)$

definimos o produto misto $\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})$ como

$$u \cdot (v \times w) = u \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} =$$

$$u \cdot \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right) =$$

1.1 Vetores no plano e no espaço

Produto misto de três vetores:

$$\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Propriedades do produto misto:

1) *O valor absoluto* $|\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{w})|$

é o volume do paralelepípedo de arestas $\bar{u}$, $\bar{v}$ *e* $\bar{w}$.

Cálculo Diferencial e Integral III

1.1 Vetores no plano e no espaço

2) $u \cdot (u \times v) = 0 = u \cdot (v \times u)$, pois $u \times v$ é ortogonal a u, logo $u \cdot (u \times v) = 0$

3) O produto misto verifica as seguines relações

$$u \cdot (v \times w) = -u \cdot (w \times v) = w \cdot (u \times v)$$

(correspondentes a trocar a ordem de colunas em um determinante)

4) $u \cdot (w \times w) = 0 = w \cdot (u \times w)$.

Exemplo: *Sabendo que* $u \cdot (v \times w) = 2$ *determine*

$$v \cdot (u \times w), \quad w \cdot (u \times v), \quad u \cdot (w \times v).$$

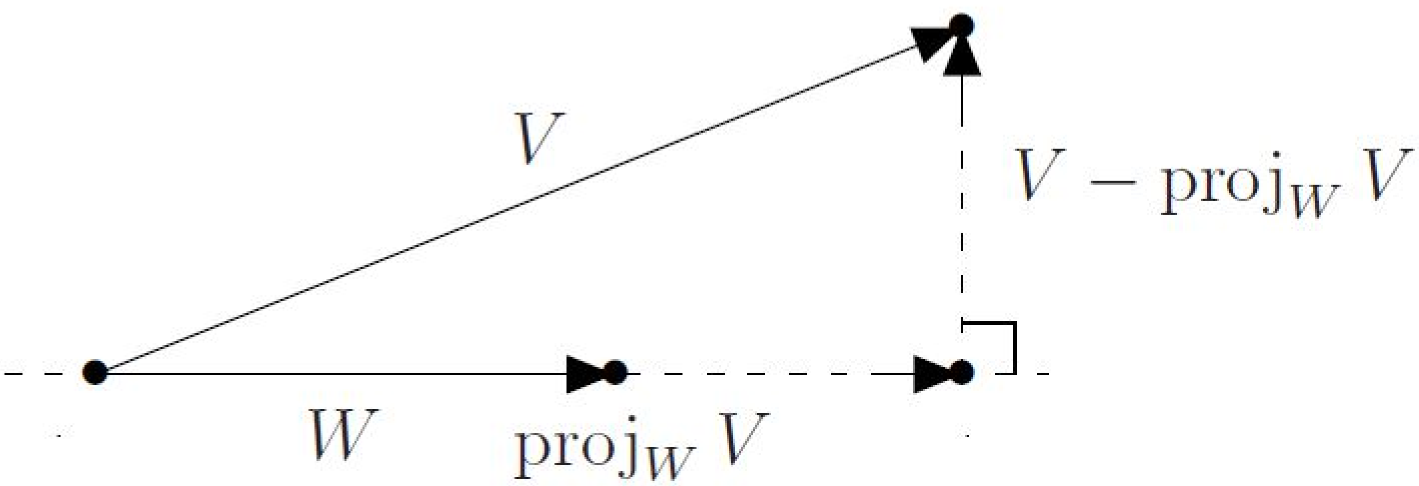
1.1 Vetores no plano e no espaço

Observe que

$$v \cdot (u \times w) = -u \cdot (v \times w) = -2.$$

$$w \cdot (u \times v) = -u \cdot (w \times v) = u \cdot (v \times w) = 2.$$

Projeção Ortogonal



1.1 Vetores no plano e no espaço

Sejam $V_1 = \text{proj}_W V$ e $V_2 = V - \text{proj}_W V$.

$$V_1 = \alpha W.$$

$$V_2 = V - \alpha W\,.$$

$$V_2 \cdot W = (V - \alpha W) \cdot W = V \cdot W - \alpha ||W||^2.$$

Mas, V_2 é ortogonal a W, então $V_2 \cdot W = 0$.

Portanto,

$$\alpha = \frac{V \cdot W}{||W||^2}\,.$$

$$\text{proj}_W V = \; V_1 = \alpha W = \left(\frac{V \cdot W}{||W||^2}\right) W\,.$$

Cálculo Diferencial e Integral III

1.1 Vetores no plano e no espaço

Exemplo: Sejam $V = (2,-1,3)$ e $W = (4,-1,2)$.

Vamos encontrar dois vetores V_1 e V_2 tais que $V = V_1 + V_2$, V_1 é paralelo a W e V_2 é perpendicular a W

Temos que $V \cdot W = 2 \cdot 4 + (-1)(-1) + 3 \cdot 2 = 15$

$$||W||^2 = 4^2 + (-1)^2 + 2^2 = 21\,.$$

$$V_1 = \mathrm{proj}_W V = \left(\frac{V \cdot W)}{||W||^2}\right) W = \left(\frac{15}{21}\right)(4,-1,2) = (\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7})$$

$$V_2 = V - V_1 = (2,-1,3) - (\frac{20}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{10}{7}) = (-\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{11}{7})\,.$$

Cálculo Diferencial e Integral IV

"Anda com os sábios e serás sábio, mas o companheiro dos tolos será afligido."

"Diga-me com quem andas e eu lhe direi quem és."

"Não vos enganeis: as más conversações corrompem os bons costumes."

Provérbios 13:20