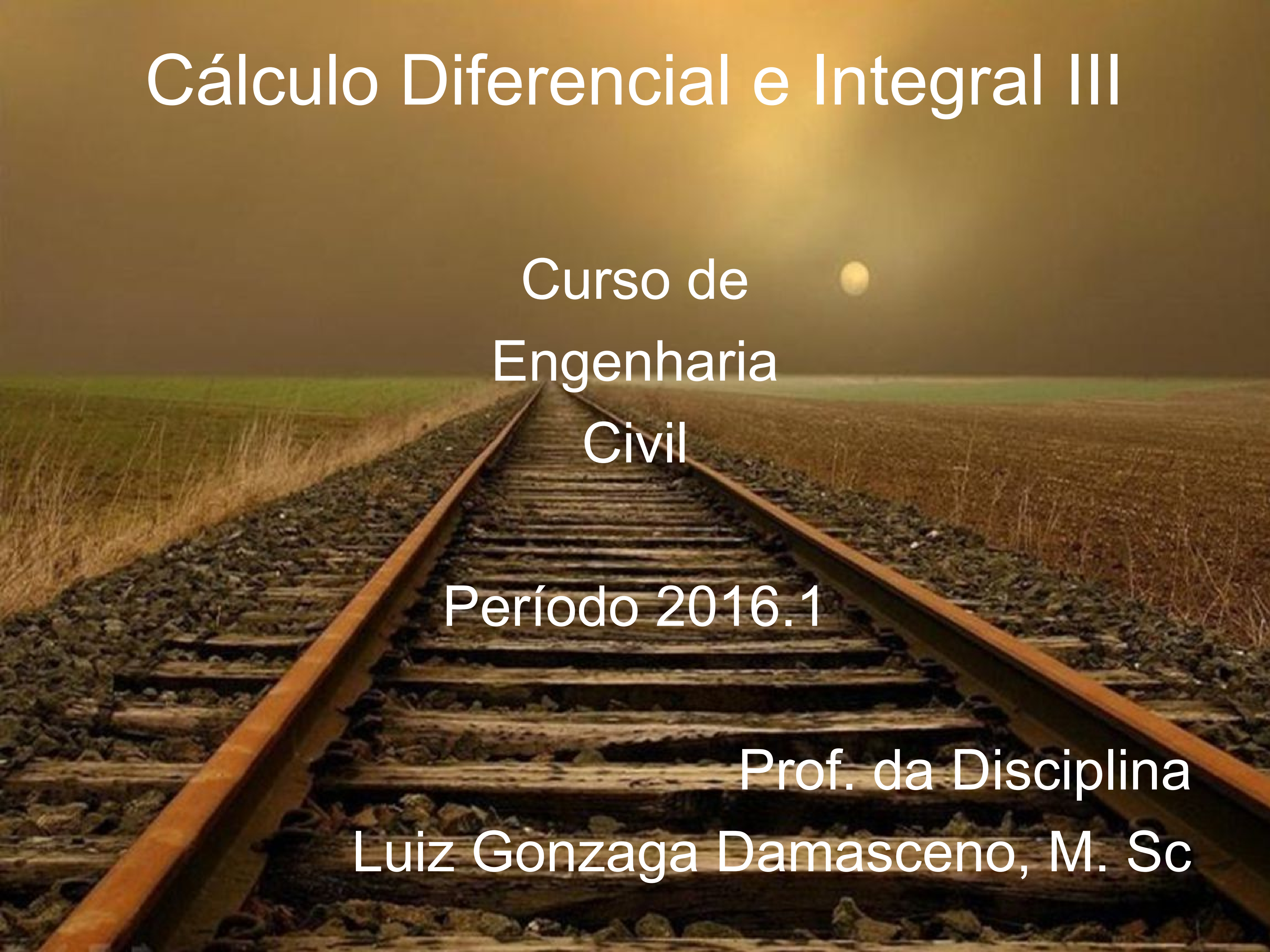


Cálculo Diferencial e Integral III

Curso de
Engenharia
Civil

Período 2016.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Cálculo Diferencial e Integral III

E-mails:

damasceno12@hotmail.com
damasceno12@uol.com.br
damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info
damasceno.info

Cálculo Diferencial e Integral III

“A morte e a vida estão no poder da língua; e aquele que a ama comerá do seu fruto.”

“O seu modo de falar poderá lhe promover ou destruir.”

“O seu modo de falar lhe trará bênçãos ou maldições, tanto no tempo presente como na eternidade.”

Provérbios 18:21

Cálculo Diferencial e Integral III

Unidade I – Funções vetoriais

1.1 Vetores no plano e no espaço

Muitas grandezas físicas, como velocidade, força, deslocamento e impulso, para serem identificadas, precisam, além da magnitude, a direção e o sentido.

Estas grandezas são chamadas **grandezas vetoriais** ou simplesmente **vetores**.

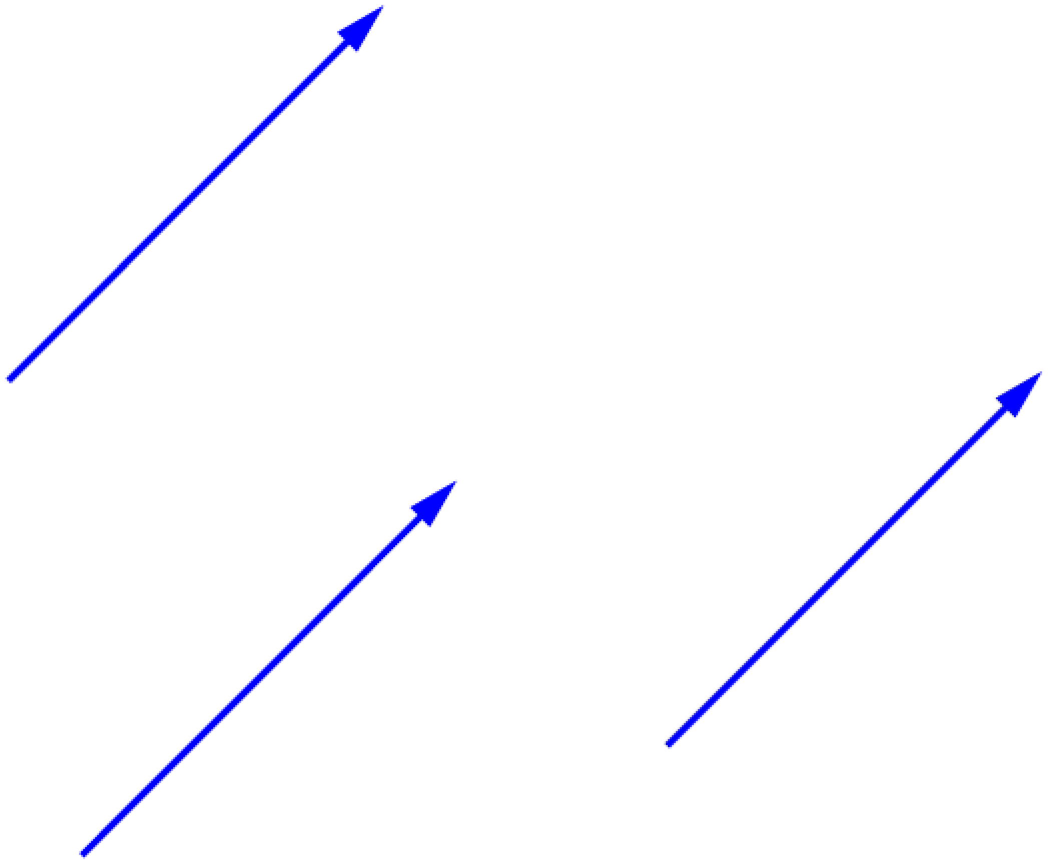
Geometricamente, vetores são representados por **segmentos de retas orientados** no plano ou no espaço.

A ponta da seta do segmento orientado é chamada **ponto final ou extremidade** e o outro ponto extremo é chamado de **ponto inicial ou origem** do segmento orientado.

Cálculo Diferencial e Integral III

1.1 Vetores no plano e no espaço

Segmentos orientados com mesma direção, mesmo sentido e mesmo comprimento representam o mesmo vetor.

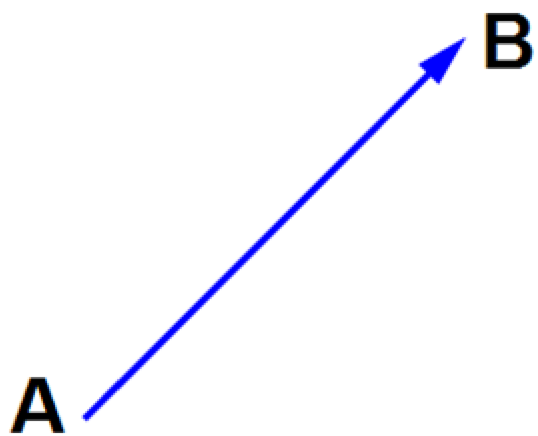


1.1 Vetores no plano e no espaço

Os vetores acima são vetores iguais, pois possuem a mesma direção, mesmo sentido e o mesmo comprimento.

Se o ponto inicial de um vetor *V* é *A* e o ponto final é *B*, então

$$V = \overrightarrow{AB}$$



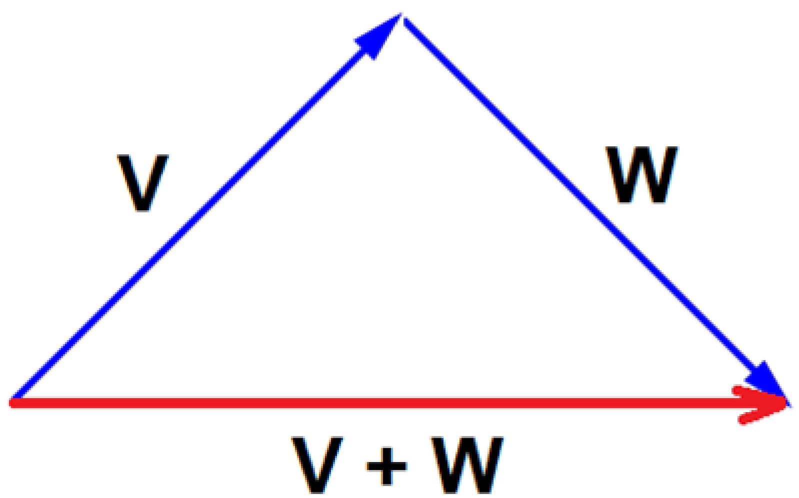
1.1 Vetores no plano e no espaço

Soma de Vetores:

A soma, $V+W$, de dois vetores V e W é obtida da seguinte forma:

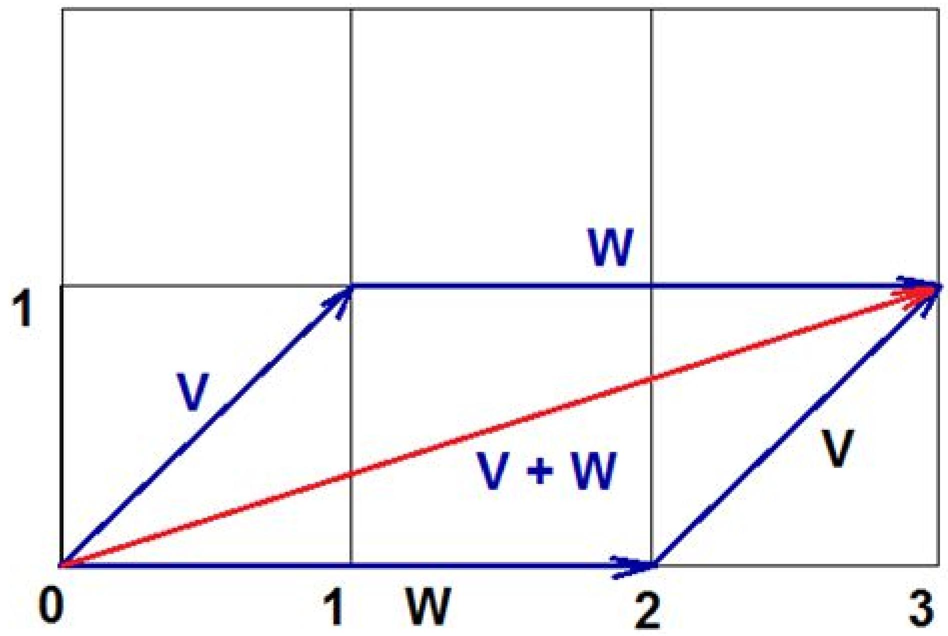
tome a origem de W como sendo a extremidade de V;

o vetor $V+W$ é representado pelo segmento orientado que vai da origem de V até a extremidade de W.



1.1 Vetores no plano e no espaço

Exemplo: Considere os vetores V = (1, 1) e W = (0, 2). Então V + W é igual a (1, 3).



V + W = (1, 1) + (0, 2) = (1, 3)

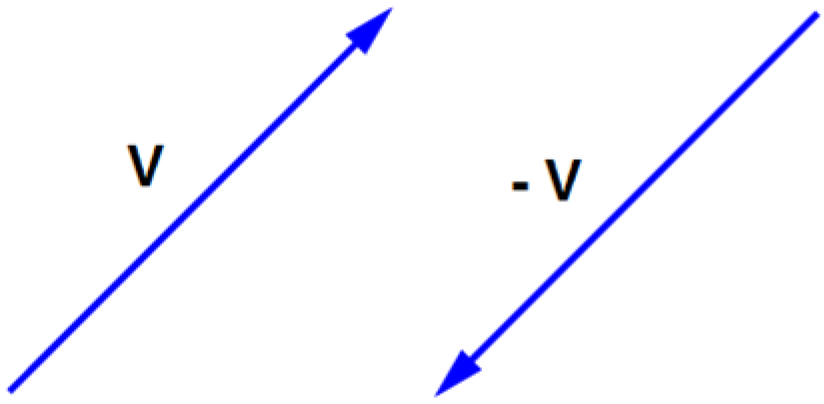
Cálculo Diferencial e Integral III

1.1 Vetores no plano e no espaço

Vetor nulo: O vetor que tem a sua origem coincidindo com a sua extremidade.

V + 0 = 0 + V = V, para todo vetor V.

Vetor simétrico: O vetor simétrico de V, denotado por – V, é o vetor que tem a mesma direção, a mesma medida e sentido contrário a V.

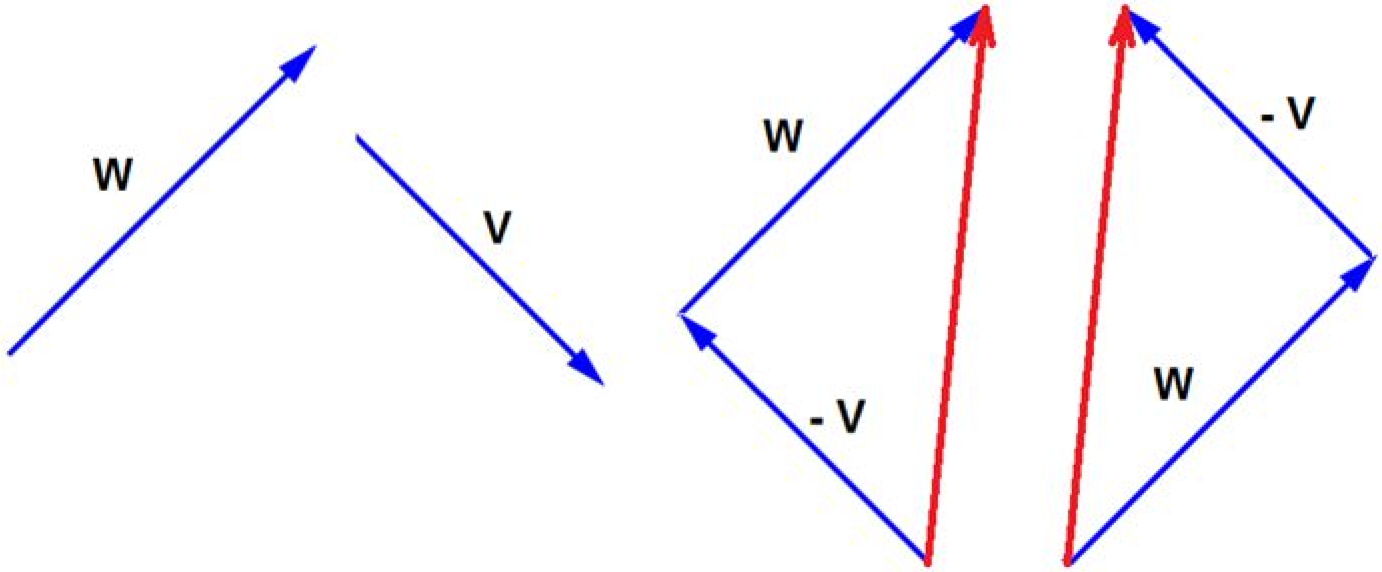


V + (– V) = 0

1.1 Vetores no plano e no espaço

Vetor diferença: Definimos a diferença W – V por

W – V = W + (– V) = – V + W



Cálculo Diferencial e Integral III

1.1 Vetores no plano e no espaço

Multiplicação por Escalar

Definimos a multiplicação aV, onde a é um escalar e V um vetor

1) $= 0$ se $a = 0$ ou $V = 0$;

2) Caso contrário, por um vetor

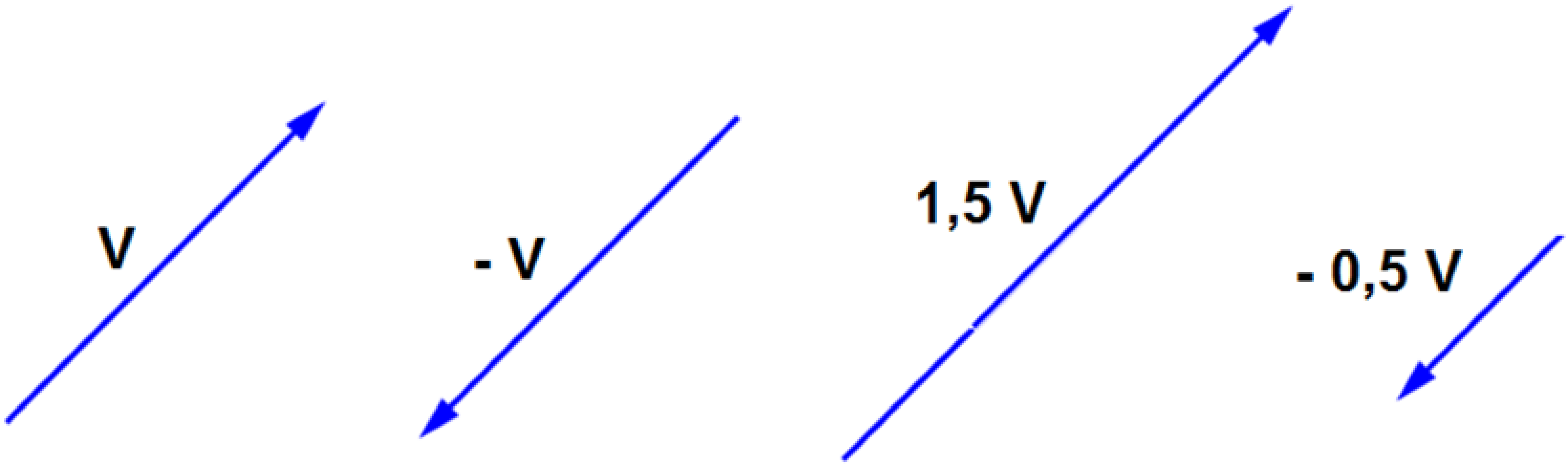
de comprimento $|a|$ vezes o comprimento de V;

de mesma direção que V;

de mesmo sentido se $a > 0$ e sentido contrário se $a < 0$.

Cálculo Diferencial e Integral III

1.1 Vetores no plano e no espaço



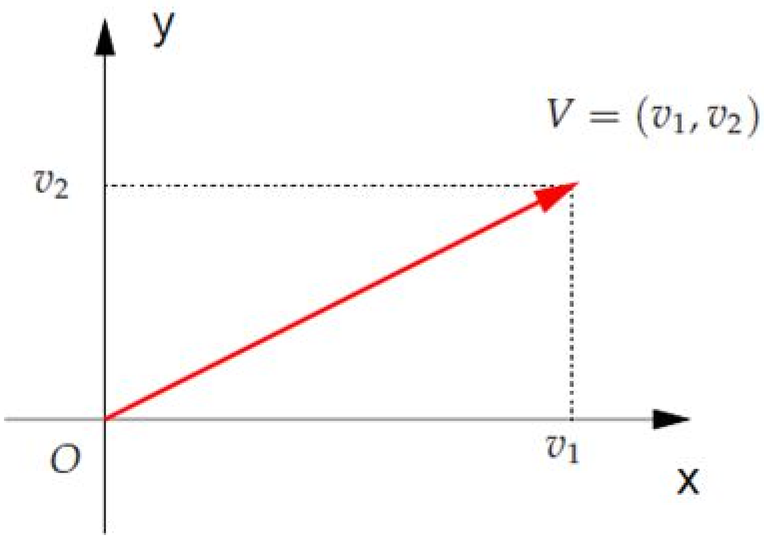
Seja V um vetor no plano. Definimos as **componentes de** V como sendo as coordenadas (v_1, v_2) da extremidade de V que tem ponto inicial na origem.

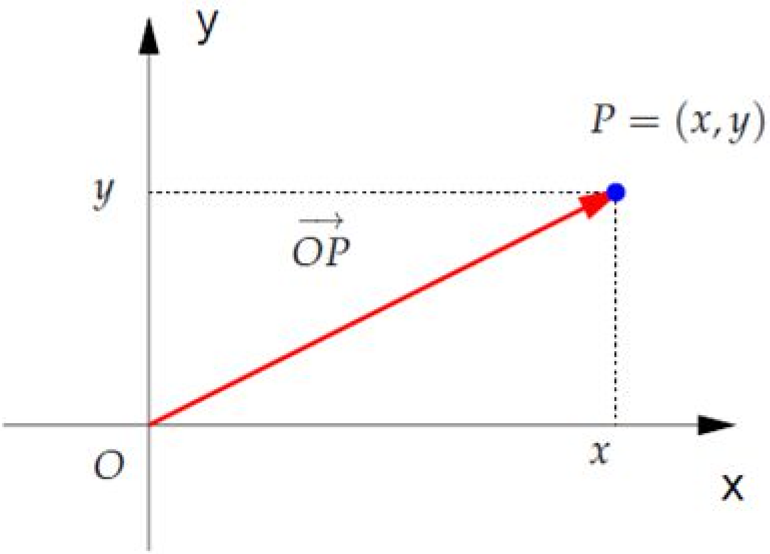
$$V = (v_1, v_2).$$

1.1 Vetores no plano e no espaço

Assim, as coordenadas de um ponto *P* são iguais as componentes do vetor *OP*.

Em particular, o vetor nulo, 0 = (0, 0).





1.1 Vetores no plano e no espaço

Em termos das componentes a **soma** de dois vetores $V = (v_1, v_2)$ e $W = (w_1, w_2)$ é dada por

$$V + W = (v_1 + w_1, v_2 + w_2);$$

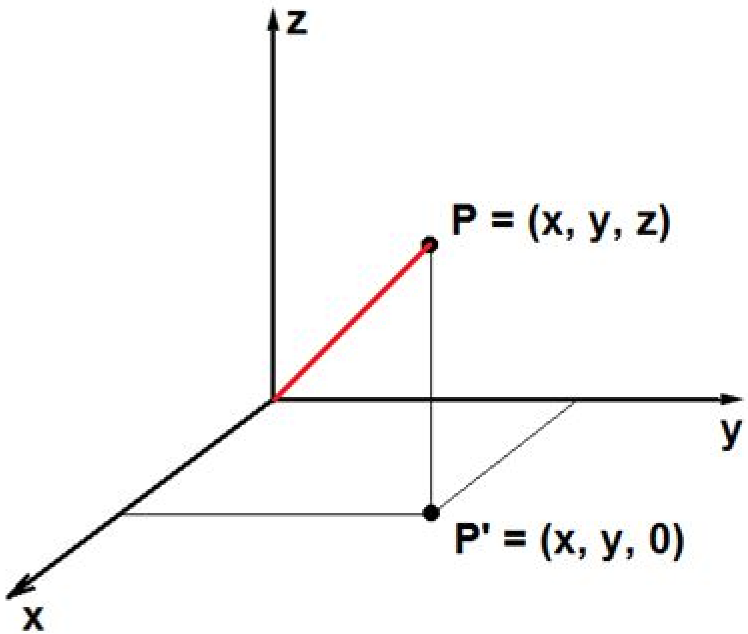
A **multiplicação** de um vetor $V = (v_1, v_2)$ por um escalar a é dada por

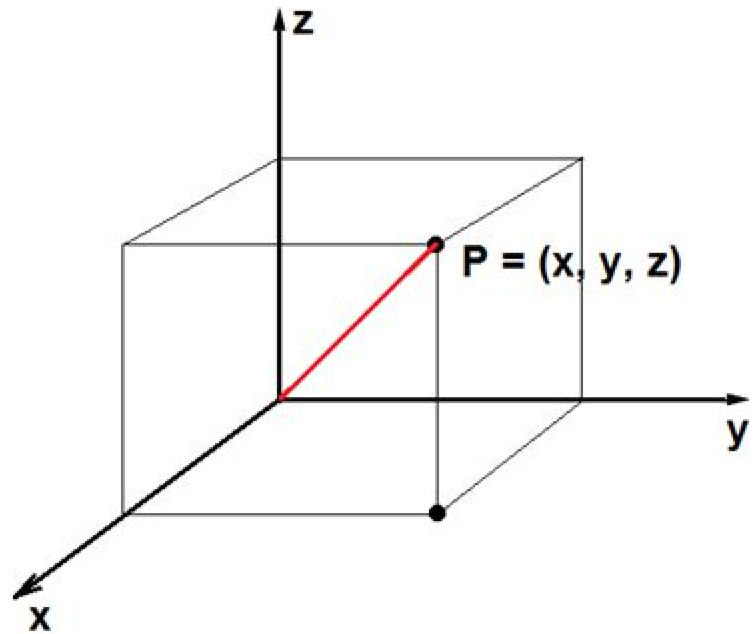
$$a\,V = (a\,v_1\,,\ a\ v_2).$$

Definimos as **componentes de um vetor no espaço** de forma análoga a que fizemos com vetores no plano.

Cálculo Diferencial e Integral III

1.1 Vetores no plano e no espaço





As coordenadas de um ponto no espaço (R^3).

1.1 Vetores no plano e no espaço

Se $V = (v_1, v_2, v_3)$, $W = (w_1, w_2, w_3)$ e a, b são escalares, então

$$aV + bW = a(v_1, v_2, v_3) + b(w_1, w_2, w_3) =$$

$$= (av_1 + bw_1, av_2 + bw_2, av_3 + bw_3)$$

Exemplo: Se $V = (2, -3, 1)$ e $W = (3, 1, -1)$, então

$$V + W = (2, -3, 1) + (3, 1, -1) = (5, -2, 0);$$

$$V - W = (2, -3, 1) - (3, 1, -1) = (-1, -4, 2);$$

$$3V + 2W = 3(2, -3, 1) + 2(3, 1, -1) = (12, -7, 1).$$

1.1 Vetores no plano e no espaço

Exemplo: Considere V um vetor com origem em (1, 2, 3) e extremidade em (3, 2, 1). Então

$$V = (3, 2, 1) - (1, 2, 3) = (2, 0, -2).$$

Um vetor no espaço $V = (v_1, v_2, v_3)$ pode também ser escrito na notação matricial como uma **matriz linha** ou como uma **matriz coluna**:

$$V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad V = [v_1, \; v_2, \; v_3]$$

Pois as operações matriciais produzem os mesmos resultados que as operações vetoriais.

1.1 Vetores no plano e no espaço

Norma de um vetor: O comprimento do vetor V = (x, y) é dado por $||V||^2 = x^2 + y^2$, onde ||V|| é a norma ou comprimento de *V*.

Se V = (x, y, z) então $||V||^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Um vetor de norma igual a 1 é chamado de vetor unitário.

A distância entre dois pontos P = (a, b, c) e Q = (x, y, z) é dada pela norma do vetor PQ = (x – a, y – b, z – c), isto é, $||PQ||^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$.

Cálculo Diferencial e Integral III

1.1 Vetores no plano e no espaço

Analogamente, a distância entre dois pontos P = (a, b) e Q = (x, y) do plano é dada pela norma do vetor PQ = (x – a, y – b), isto é, $||PQ||^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$.

Exemplo: Se V = (3, 4), então

$||V||^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$. Logo ||V|| = 5.

Exemplo: Se P = (1, 1) e Q = (2, 2), então

d(P, Q) = ||PQ|| = ||(2 – 1, 2 – 1)|| = ||(1, 1)|| = $\sqrt{2}$.

Exemplo: Se P = (1, 1, 1) e Q = (2, 2, 2), então

d(P, Q) = ||PQ|| = ||(2 – 1, 2 – 1, 2 – 1)|| = ||(1, 1, 1)|| = $\sqrt{3}$.

1.1 Vetores no plano e no espaço

Propriedades da Norma de um vetor: Se V é um vetor e k um escalar, então || kV || = |k| || V ||.

Dado um vetor V não nulo, o vetor $U = \frac{1}{||V||}V$ é um vetor unitário na direção de V.

Exemplo: Ache um vetor unitário na direção de (1) V = (3, 4) e (2) V = (1, 2, 3).

$$U = \frac{1}{||V||}V = \frac{1}{\sqrt[2]{9+16}}(3,4) = \frac{1}{5}(3,4).$$

$$U = \frac{1}{||V||}V = \frac{1}{\sqrt[2]{1+4+9}}(1,2,3) = \frac{1}{\sqrt[2]{14}}(1,2,3).$$

Cálculo Diferencial e Integral III

1.1 Vetores no plano e no espaço

Norma e Produto Escalar

$V = (v_1, v_2)$ $\qquad ||V|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

$V = (v_1, v_2, v_3)$ $\qquad ||V|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

Um vetor de norma igual a 1 é chamado **vetor unitário**.

A **distância entre dois pontos** $P = (x_1, y_1, z_1)$ **e** $Q = (x_2, y_2, z_2)$

$$\text{dist}(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

e a **distância entre dois pontos** $P = (x_1, y_1)$ **e** $Q = (x_2, y_2)$

$$\text{dist}(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

1.1 Vetores no plano e no espaço

Exemplo: A norma do vetor $V = (1, -2, 3)$ é

$$||V|| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

Exemplo: A distância entre os pontos $P = (2, -3, 1)$ e $Q = (-1, 4, 5)$ é

$$\operatorname{dist}(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = ||(-1-2, 4-(-3), 5-1)||$$

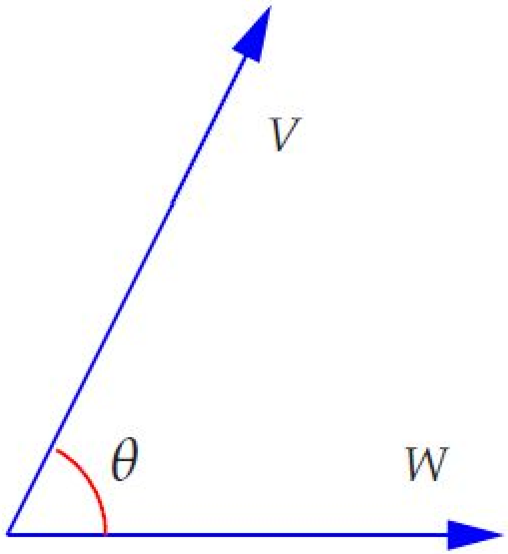
$$= ||(-3, 7, 4)|| = \sqrt{(-3)^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{74}.$$

1.1 Vetores no plano e no espaço

Definição: O **produto escalar** de dois vetores V e W é definido por

$$V \cdot W = ||V|| \, ||W|| \cos\theta$$

θ é o ângulo entre eles.



Cálculo Diferencial e Integral III

1.1 Vetores no plano e no espaço

Teorema: $V = (v_1, v_2)$ e $W = (w_1, w_2)$

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2,$$

$V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3,$$

Exemplo: Sejam $V = (0, 1, 0)$ e $W = (2, 2, 3)$.

$$V \cdot W = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 =$$

$$= 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 2\,.$$

1.1 Vetores no plano e no espaço

Exemplo: Determinar o ângulo entre dois vetores não nulos, V e W.

$$V \cdot W = ||V|| \, ||W|| \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{V \cdot W}{||V|| \, ||W||}.$$

(a) se, $V \cdot W > 0$, então θ é agudo $(0 \leq \theta < 90^{o})$

(b) se, $V \cdot W = 0$, então θ é reto $(\theta = 90^{o})$

(c) se, $V \cdot W < 0$, então θ é obtuso $(90^{o} < \theta \leq 180^{o})$

Cálculo Diferencial e Integral III

1.1 Vetores no plano e no espaço

Exemplo: Determinar o ângulo entre uma diagonal de um cubo e uma de suas arestas.

$V_1 = (1, 0, 0), V_2 = (0, 1, 0)$ e $V_3 = (0, 0, 1)$

$$D = V_1 + V_2 + V_3 = (1, 1, 1)\,.$$

$$\cos\theta = \frac{D \cdot V_1}{||D||||V_1||} = \frac{1.1 + 0.1 + 0.1}{(\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2})(\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \theta = \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 54^{\circ}\,.$$

1.1 Vetores no plano e no espaço

Teorema : *Sejam* U, V *e* W *vetores e* α *um escalar.*

(a) $U \cdot V = V \cdot U$;

(b) $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$;

(c) $\alpha(U \cdot V) = (\alpha U) \cdot V = U \cdot (\alpha V)$;

(d) $V \cdot V = ||V||^2 \geq 0$, *para todo* V *e*

(e) $V \cdot V = 0$ *se, e somente se,* $V = 0$

Cálculo Diferencial e Integral IV

“Não tenhas inveja dos pecadores; antes conserva-te no temor do Senhor todo o dia.”

Para aprender a ser sábio:

1) você deve ser humilde e admitir ser ignorante;

2) você deve parar de pensar e de falar, para que você possa ser ensinado por aqueles que são mais sábios do que você;

3) você deve praticar o amor e se dedicar àquilo para o qual você foi ensinado.

Provérbios 22:17