Cálculo Diferencial e Integral II

Curso de
Engenharia
Civil

Período 2014.2

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Cálculo Diferencial e Integral II

E-mails:

damasceno12@hotmail.com
damasceno12@uol.com.br
damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info
damasceno.info

Cálculo Diferencial e Integral II

"Cultivar estados mentais positivos como a generosidade e a compaixão decididamente conduz a melhor saúde mental e a felicidade."

"Só existem dois dias no ano que nada pode ser feito. Um se chama ontem e o outro se chama amanhã, portanto hoje é o dia certo para amar, acreditar, fazer e principalmente viver."

(Dalai Lama)

5.2 – Integração por frações parciais

Essa técnica de decomposição é o método de frações parciais. Qualquer função racional pode ser escrita como a soma de frações básicas, chamadas frações parciais.

Exemplo: $$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}$$

É fácil achar a integral $$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx$$

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx = \int \frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}dx =$$

$$\int \frac{2}{x+1}dx+\int \frac{3}{x-3}dx = 2\ln(x+1)+3\ln(x-3)+C$$

5.2 – Integração por frações parciais

Exemplo 4: Use o método de frações parciais para calcular

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\,dx$$

Primeiro fatoramos o denominador:

$$x^2-2x-3 = (x+1)(x-3)$$

Depois determinamos A e B de maneira que

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}$$

Multiplique os dois lados da equação por $(x+1)(x-3)$

Cálculo Diferencial e Integral II

5.2 – Integração por frações parciais

$$5x-3 = A(x-3)+B(x+1) \quad =>$$

$$5x-3 = (A+B)x-3A+B \quad =>$$

$$A+B = 5 \quad e \quad -3A+B = -3 \quad \text{que resolvidas}$$

nos dá $A = 2$ *e* $B = 3$. *Então,*

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx = \int \frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-3}dx =$$

$$\int \frac{2}{x+1}dx+\int \frac{3}{x-3}dx = 2\ln(x+1)+3\ln(x-3)+C$$

Cálculo Diferencial e Integral II

5.2 – Integração por frações parciais

Exemplo 5: Use o método de frações parciais para calcular

$$\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}\,dx$$

Expressemos a fração acima como

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

Multiplique os dois lados da equação por $(x+2)(x+2)$

$$6x+7 = A(x+2)+B \quad =>$$

$$6x+7 = Ax+2A+B \quad =>$$

$$A=6 \quad e \quad 2A+B=7 \quad =>$$

5.2 – Integração por frações parciais

Exemplo 5: Use o método de frações parciais para calcular

$A = 6$ *e* $B = -5$ *Então,*

$$\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}dx = \int \frac{6}{x+2}dx - \int \frac{5}{(x+2)^2}dx =$$

$$6\ln(x+2) - 5(x+2)^{-1} + C$$

5.2 – Integração por frações parciais

Exemplo 5: Encontre a solução de

$$\frac{dy}{dx} = 2\,x\,y\left(y^2+1\right)$$

Separando as variáveis, reescrevemos a equação diferencial como

$$\frac{1}{y\left(y^2+1\right)}dy = 2\,x\,dx$$

Integrando os dois lados temos

$$\int \frac{1}{y\left(y^2+1\right)}dy = \int 2\,x\,dx$$

Cálculo Diferencial e Integral II

5.2 – Integração por frações parciais

Usamos as frações parciais para reescrever o integrando à esquerda

$$\frac{1}{y\left(y^2+1\right)} = \frac{A}{y} + \frac{By+C}{y^2+1}$$

Multiplique os dois lados da equação por $y\left(y^2+1\right)$

$$1 = A\left(y2+1\right) + \left(By+C\right)y \qquad =>$$

$$1 = \left(A+B\right)y^2 + Cy + A \qquad =>$$

$$A = 1,\ C = 0 \ e \ A+B = 0 \qquad =>$$

$$A = 1,\ C=0 \ e \ B = -1$$

Cálculo Diferencial e Integral II

5.2 – Integração por frações parciais

Integrando os dois lados temos

$$\int \frac{1}{y\left(y^2+1\right)}dy \;=\; \int 2\,x\,dx \qquad =>$$

$$\int \frac{1}{y}dy \;-\int \frac{y}{y^2+1}dy \;=\; \int 2\,x\,dx \qquad =>$$

$$\int \frac{1}{y}dy-\frac{1}{2}\int \frac{2\,y}{y^2+1}dy \;=\; \int 2\,x\,dx \qquad =>$$

$$\ln y-\frac{1}{2}\ln\left(y^2+1\right) \;=\; x^2+C$$

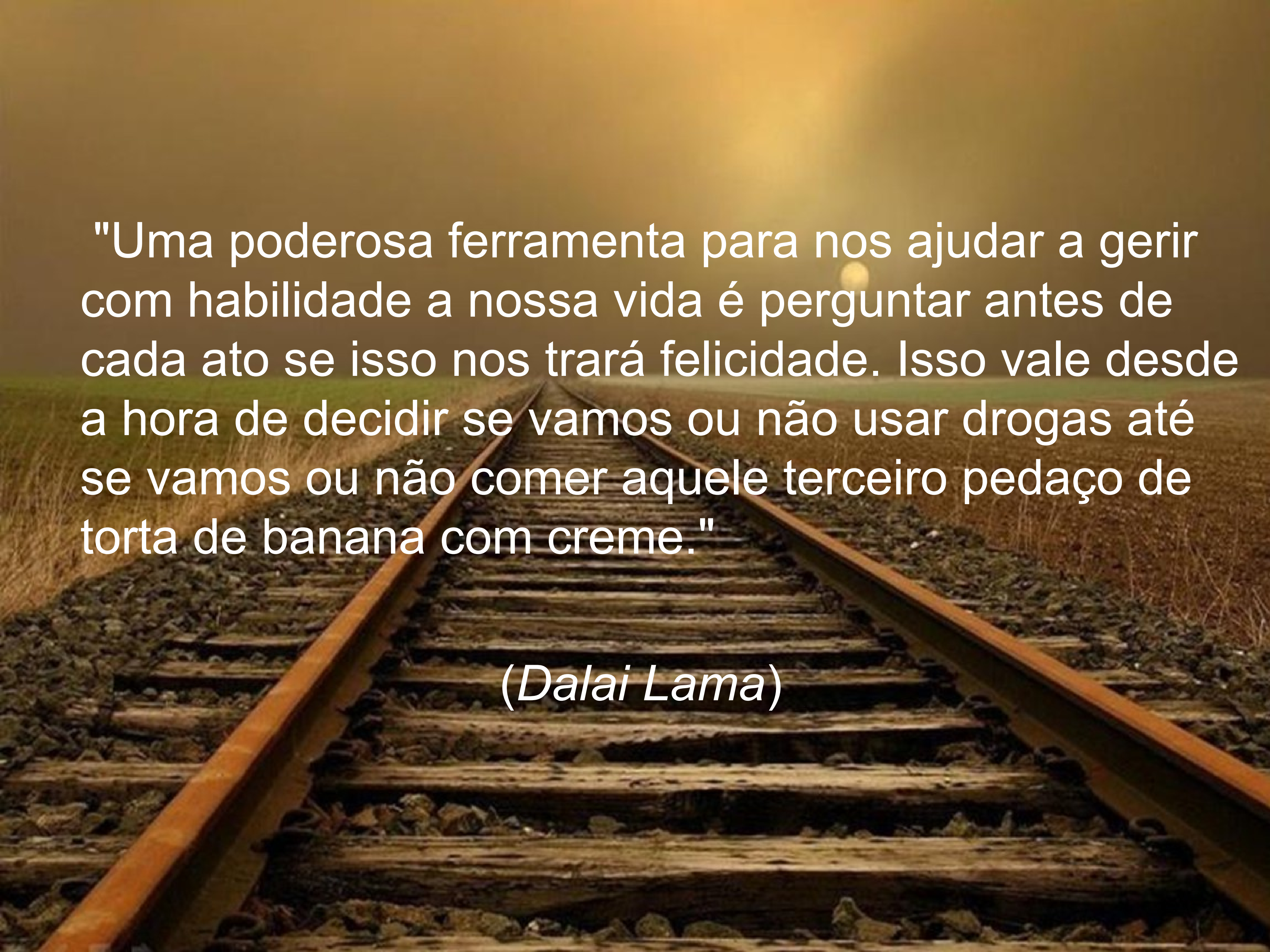
5.2 – Integração por frações parciais

Substituindo $x = 0$ *e* $y = 1$, *encontramos*

$$\ln 1 - \frac{1}{2}\ln(1+1) = C \quad => \quad C = -\frac{1}{2}\ln 2 = -\ln\sqrt{2}$$

A solução do problema de valor inicial é

$$\ln y - \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = x^2 - \ln\sqrt{2}$$


"Uma poderosa ferramenta para nos ajudar a gerir com habilidade a nossa vida é perguntar antes de cada ato se isso nos trará felicidade. Isso vale desde a hora de decidir se vamos ou não usar drogas até se vamos ou não comer aquele terceiro pedaço de torta de banana com creme."
(*Dalai Lama*)