

Cálculo Diferencial e Integral II

Curso de
Engenharia
Civil

Período 2014.2

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Cálculo Diferencial e Integral II

E-mails:

damasceno12@hotmail.com

damasceno12@uol.com.br

damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info

damasceno.info

Cálculo Diferencial e Integral II

“Vigiar não é desconfiar. É acender a própria luz, ajudando os que se encontram nas sombras.

Defender não é gritar. É prestar mais intenso serviço às causas e às pessoas.

Ensinar não é ferir. É orientar o próximo, amorosamente, para o reino da compreensão e da paz.

Renovar não é destruir. É respeitar os fundamentos, restaurando as obras para o bem geral.”

André Luiz

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração

3.1 – Integral indefinida

Função

Derivada

x

1

x^2

$2x$

x^3

$3x^2$

x^4

$4x^3$

x^5

$5x^4$

x^n

nx^{n-1}

$\text{sen } x$

$\text{cos } x$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração

3.1 – Integral indefinida

Função

Derivada

$\cos x$

$-\cos x$

e^x

e^x

$\ln x$

$\frac{1}{x}$

a^x

$a^x \ln a$

$\log_a x$

$\frac{1}{x \ln a}$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração

3.1 – Integral indefinida

Dizemos que $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$ se $F'(x) = f(x)$.

Exemplos:

(1) $F(x) = x^2$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$

(2) $F(x) = x^2 + 1$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$

(3) $F(x) = x^2 + 100$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$

(4) $F(x) = x^2 - 1000$ é uma primitiva de $f(x) = 2x$

(5) $F(x) = x^2 + 2x + 1$ é uma primitiva de $f(x) = 2x + 2$

(6) $F(x) = x^2 + 2x - 5$ é uma primitiva de $f(x) = 2x + 2$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração

3.1 – Integral indefinida

Função

Primitiva

1

$x + C$

$2x$

$x^2 + C$

$3x^2$

$x^3 + C$

$4x^3$

$x^4 + C$

$5x^4$

$x^5 + C$

nx^{n-1}

$x^n + C$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração

3.1 – Integral indefinida

Função

Primitiva

$$\cos x$$

$$\operatorname{sen} x + C$$

$$-\operatorname{sen} x$$

$$\cos x + C$$

$$e^x$$

$$e^x + C$$

$$\frac{1}{x}$$

$$\ln x + C$$

$$a^x \ln a$$

$$a^x + C$$

$$\frac{1}{x \ln a}$$

$$\log_a x + C$$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração 3.1 – Integral indefinida

A integral indefinida de $f(x)$ em relação a x é o conjunto de todas as primitivas de $f(x)$.

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{onde} \quad F'(x) = f(x)$$

Exemplos:

$$(1) \quad \int 2x dx = x^2 + C$$

$$(2) \quad \int (3x^2 + 2x + 5) dx = x^3 + x^2 + 5x + C$$

$$(3) \quad \int \left(\cos x - \operatorname{sen} x + \frac{1}{x} \right) dx = \operatorname{sen} x + \cos x + \ln x + C$$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração

3.1 – Integral indefinida

<i>Função</i>	<i>Primitiva</i>	<i>Integral indefinida</i>
$f(x)$	$F(x)$	$\int f(x) dx$
1	$x + C$	$x + C$
$2x$	$x^2 + C$	$x^2 + C$
$3x^2$	$x^3 + C$	$x^3 + C$
$4x^3$	$x^4 + C$	$x^4 + C$
$5x^4$	$x^5 + C$	$x^5 + C$
nx^{n-1}	$x^n + C$	$x^n + C$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração

3.1 – Integral indefinida

<i>Função</i>	<i>Primitiva</i>	<i>Integral indefinida</i>
$\cos x$	$\text{sen } x + C$	$\text{sen } x + C$
$-\text{sen } x$	$\cos x + C$	$\cos x + C$
e^x	$e^x + C$	$e^x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$\ln x + C$
$a^x \ln a$	$a^x + C$	$a^x + C$
$\frac{1}{x \ln a}$	$\log_a x + C$	$\log_a x + C$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração 3.1 – Integral indefinida

Se $y = F(x)$ é uma função cuja derivada é conhecida, digamos,

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x), \quad \text{podemos dizer que}$$

$$F(x) = \int f(x) dx + C$$

ou ainda que

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = \int f(x) dx + C$$

(são igualdades equivalentes)

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração

3.1 – Integral indefinida

Exemplos:

$$(1) \quad \int dx = \int 1 dx = x + C$$

$$\int x dx = \frac{1}{2} \int 2x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} \int (n+1)x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração 3.1 – Integral indefinida

Exemplos:

$$(2) \quad \int \cos x \, dx = \text{sen } x + C$$

$$\int \text{sen } x \, dx = - \int -\text{sen } x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \text{tg } x + C$$

$$\int \text{cossec}^2 x \, dx = - \int -\text{cossec}^2 x \, dx = -\text{cotg } x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \int \sec^2 x \, dx = \text{tg } x + C$$

$$\int \frac{1}{\text{sen}^2 x} \, dx = \int \text{cossec}^2 x \, dx = -\text{cotg } x + C$$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração

3.1 – Integral indefinida

Exemplos:

$$(3) \quad \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \int \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \int \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração

3.2 – Integrais imediatas

$$(1) \quad \int dx = \int 1 dx = x + C$$

$$(2) \quad \int 2x dx = x^2 + C$$

$$(3) \quad \int 3x^2 dx = x^3 + C$$

$$(4) \quad \int 4x^3 dx = x^4 + C$$

$$(5) \quad \int 5x^4 dx = x^5 + C$$

$$(6) \quad \int (n+1)x^n dx = x^{n+1} + C$$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração

3.2 – Integrais imediatas

$$(7) \quad \int dx = \int 1 dx = x + C$$

$$(8) \quad \int x dx = \frac{1}{2} \int 2x dx = \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$(9) \quad \int x^2 dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$(10) \quad \int x^3 dx = \frac{1}{4} \int 4x^3 dx = \frac{1}{4} x^4 + C$$

$$(11) \quad \int x^4 dx = \frac{1}{5} \int 5x^4 dx = \frac{1}{5} x^5 + C$$

$$(12) \quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1} \int (n+1)x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração

3.2 – Integrais imediatas

$$(13) \quad \int \cos x \, dx = \text{sen } x + C$$

$$(14) \quad \int -\text{sen } x \, dx = \cos x + C$$

$$(15) \quad \int \text{sen } x \, dx = -\int -\text{sen } x \, dx = -\cos x + C$$

$$(16) \quad \int e^x \, dx = e^x + C$$

$$(17) \quad \int a^x \ln a \, dx = a^x + C$$

$$(18) \quad \int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} \int a^x \ln a \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração

3.2 – Integrais imediatas

$$(19) \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$(20) \quad \int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$(21) \quad \int -\operatorname{cosec}^2 x dx = \operatorname{cotg} x + C$$

$$(22) \quad \int \operatorname{cosec}^2 x dx = - \int -\operatorname{cosec}^2 x dx \\ = -\operatorname{cotg} x + C$$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração 3.3 - Propriedades da integral indefinida

$$(1) \quad \int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$(2) \quad \int f(x) - g(x) dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

$$(3) \quad \int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$(4) \quad \int m f(x) + n g(x) dx = m \int f(x) dx + n \int g(x) dx$$

Exemplos:

$$(1) \quad \int x^2 - 2x + 5 dx = \int x^2 dx - \int 2x dx + \int 5 dx = \\ = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 5x + C$$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração 3.3 - Propriedades da integral indefinida

Exemplos:

$$(2) \quad \int x^{-4} - 2x^{-1} + 7 dx =$$

$$\int x^{-4} - 2 \int \frac{1}{x} dx + 7 \int dx =$$

$$-\frac{1}{3} \int -3x^{-4} - 2 \ln x + 7x + C =$$

$$\frac{-1}{3} x^{-3} - 2 \ln x + 7x + C$$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração 3.3 - Propriedades da integral indefinida

Exemplos:

$$(3) \quad \int x^{\frac{2}{3}} - 2 \cos x + 5 \operatorname{sen} x \, dx =$$

$$\frac{3}{5} \int \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} - 2 \int \cos x \, dx - 5 \int -\operatorname{sen} x \, dx =$$

$$\frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} - 2 \operatorname{sen} x - 5 \cos x + C$$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração 3.3 - Propriedades da integral indefinida

Exemplos:

$$(4) \quad \int \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$
$$\int \sqrt{x} dx + \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$
$$\int x^{\frac{1}{2}} dx + \int x^{-\frac{1}{2}} dx =$$
$$\frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{1/2}}{1/2} + C$$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração 3.3 - Propriedades da integral indefinida

Exemplos:

$$(5) \quad \int x^{-2/3} - \frac{2}{3}x^{-2/3} + \frac{5}{4}x^{-4/3} \, dx$$

$$(6) \quad \int \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \, dx$$

(7) *Determine a curva cujo coeficiente angular no ponto (x, y) é $3x^2$ sabendo que ela deve passar pelo ponto $(1, -1)$.*

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{dx} dx = \int 3x^2 dx \quad \Rightarrow \quad y = x^3 + C$$

$$-1 = 1^3 + C \quad \Rightarrow \quad -1 = 1 + C \quad \Rightarrow \quad C = -2 \quad \Rightarrow \quad y = x^3 - 2$$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração 3.4 – Integrais por substituição

$$u'(x) = \frac{du}{dx} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du}{dx} = u'(x) \quad \Leftrightarrow \quad du = u'(x) dx$$

$$\int f(u(x)) u'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(u(x)) + C$$

A regra da potência na forma integral:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int u(x)^n u'(x) dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{u(x)^{n+1}}{n+1} + C$$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração 3.4 – Integrais por substituição

Exemplos:

$$(1) \quad \int \sqrt{1+x^2} \cdot 2x \, dx$$

$$u = 1 + x^2 \quad \Rightarrow \quad du = u'(x)dx$$

$$\Rightarrow \quad du = 2x dx$$

$$\int \sqrt{1+x^2} \cdot 2x \, dx = \int \sqrt{u} \, du = \int u^{\frac{1}{2}} \, du =$$

$$\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{(1+x^2)^{3/2}}{3/2} + C$$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade III – Integração 3.4 – Integrais por substituição

Exemplos:

$$(2) \int \sqrt{4x - 1} \, dx$$

$$(3) \int \sqrt{3 - 2x} \, dx$$

$$(5) \int 3x \sqrt{1 - 3x^2} \, dx$$

$$(7) \int \cos(7x + 5) \, dx$$

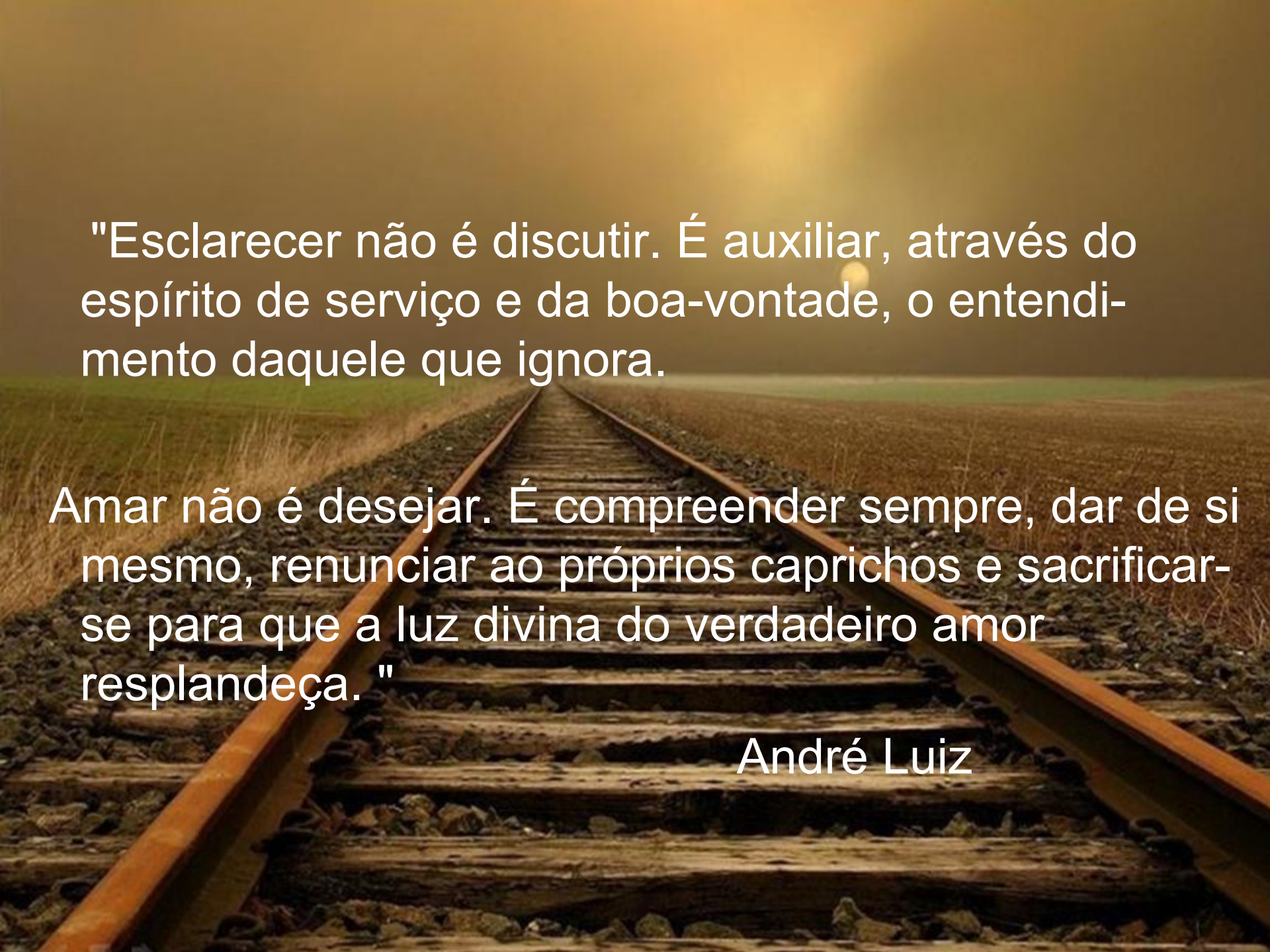
$$(9) \int \frac{2x}{3\sqrt{x^2 + 1}} \, dx$$

$$(4) \int x \sqrt[4]{1 - x^2} \, dx$$

$$(6) \int \frac{3}{(2 - x)^2} \, dx$$

$$(8) \int x^2 \operatorname{sen} x^3 \, dx$$

$$(10) \int \frac{2e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx$$



"Esclarecer não é discutir. É auxiliar, através do espírito de serviço e da boa-vontade, o entendimento daquele que ignora.

Amar não é desejar. É compreender sempre, dar de si mesmo, renunciar aos próprios caprichos e sacrificar-se para que a luz divina do verdadeiro amor resplandeça. "

André Luiz