Cálculo Diferencial e Integral II

Curso de
Engenharia
Civil

Período 2014.2

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Cálculo Diferencial e Integral II

E-mails:

damasceno12@hotmail.com
damasceno12@uol.com.br
damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info
damasceno.info

Cálculo Diferencial e Integral II

"Narra Leão Tolstoi que um sacerdote convidou um lavrador a orar, e este, que se encontrava na gleba laborando, respondeu não poder acompanhá-lo à oração porque arava. Após meditar, obtemperou o ministro da fé religiosa: fazes bem, pois que arar é também orar... "

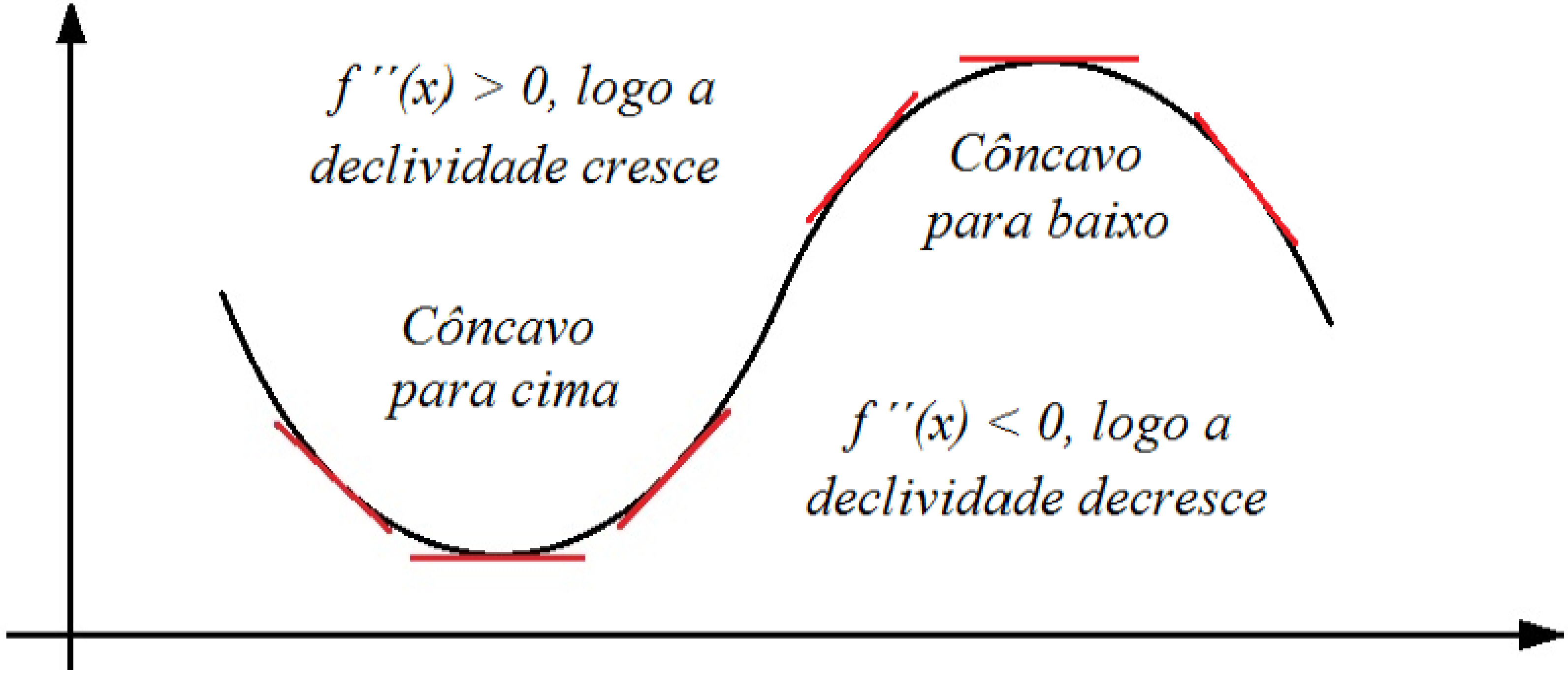
Joana de Ângelis

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade II – Aplicações de derivadas *2.2 – Máximos e mínimos*

Concavidades e pontos de inflexão

Um dos aspectos mais interessantes em um gráfico é o sentido em que ele se curva. Se a concavidade da curva está voltada para baixo ou para cima. A segunda derivada nos permite fazer esta análise.



$f''(x) > 0$ => *a curva é côncava para cima*

$f''(x) < 0$ => *a curva é côncava para baixo*

Um ponto no qual o sentido da concavidade muda chama-se ponto de inflexão. Note que no ponto de inflexão temos $f''(x) = 0$.

Ex. 17: Investigue a função $y = f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 2$ *quanto à concavidade e pontos de inflexão.*

$$f'(x) = 6x^2 - 24x + 18 = 6(x-1)(x-3)$$

$$f''(x) = 12x - 24$$

$$f''(x) = 12(x-2)$$

Unidade II – Aplicações de derivadas *2.2 – Máximos e mínimos*

Os pontos críticos são $x = 1$ *e* $x = 3$*, e os valores críticos correspondentes são* $y = 6$ *e* $y = -2$.

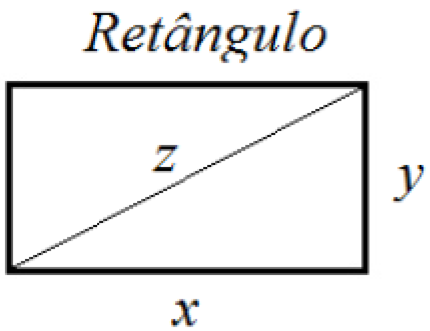
$f''(x) < 0$ *para* $x < 2$ => *concavidade voltada para baixo;*

$f''(x) > 0$ *para* $x > 2$ => *concavidade voltada para cima;*

$f''(x) = 0$ *para* $x = 2$ => *como a função muda de concavidade em* $x = 2$*, então* $x = 2$ *é um ponto de inflexão.*

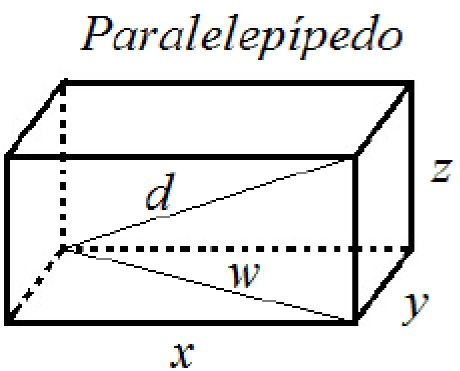
Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade II – Aplicações de derivadas *2.3 – Modelagem e otimização.*



$$A = x\,y$$

$$P = 2\,x + 2\,y \qquad z^2 = x^2 + y^2$$



$$B = x\,y \qquad V = x\,y\,z$$

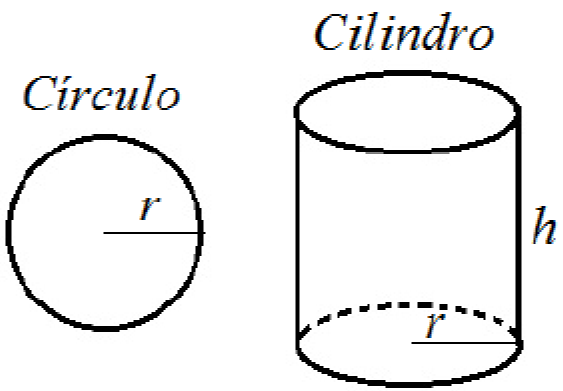
$$w^2 = x^2 + y^2 \qquad d^2 = w^2 + z^2 \qquad d^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$Sl = 2\,x\,z + 2\,y\,z \qquad St = 2\,B + Sl$$

$$St = 2\,x\,y + 2\,x\,z + 2\,y\,z$$

Cálculo Diferencial e Integral II

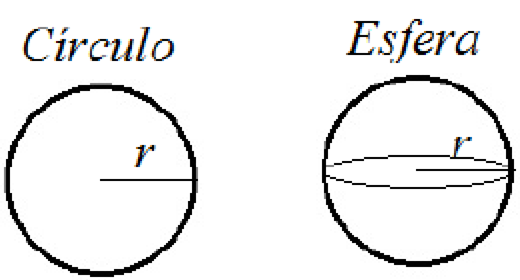
Unidade II – Aplicações de derivadas *2.3 – Modelagem e otimização.*



$$C = 2\pi r \qquad A = \pi r^2 \qquad B = \pi r^2$$

$$V = B\,h = \pi r^2 h \qquad Sl = C\,h = 2\pi r h$$

$$St = 2B + Sl = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$



$$C = 2\pi r \qquad A = \pi r^2$$

$$S = 4\pi r^2 \qquad V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Ex. 18: Achar dois números positivos cuja soma é 16 e cujo produto é o máximo possível.

$x+y=16 \quad => \quad y=16-x$

$P=x\,y \quad => \quad P=x(16-x) \quad => \quad P=16x-x^2 \quad =>$

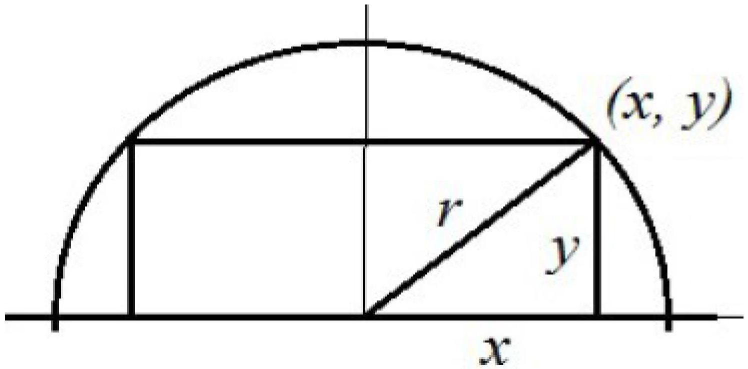
$\frac{dP}{dx}=16-2x \quad => \quad 16-2x=0 \quad => \quad x=8$

$\frac{d^2P}{dx^2}=-2<0 \quad =>$ $x=8$ *e* $y=8$ *são os valores que maximizam P.*

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade II – Aplicações de derivadas *2.3 – Modelagem e otimização.*

Ex. 19: Determine as dimensões do retângulo de maior área que pode ser inscrito num semicírculo de raio r.



$$x^2+y^2=r^2$$

$$A=2xy$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \quad =>$$

$$x+y\frac{dy}{dx}=0 \quad => \quad \frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$$

$$\frac{dA}{dx}=2y+2x\frac{dy}{dx} \quad =>$$

$$\frac{dA}{dx}=2\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\frac{dA}{dx}=0 \quad => \quad y+x\frac{dy}{dx}=0$$

$$y-\frac{x^2}{y}=0 \quad => \quad y^2-x^2=0 \quad => \quad y^2=x^2 \quad => \quad y=x$$

$$x^2+x^2=r^2 \quad => \quad 2x^2=r^2 \quad => \quad x^2=\frac{r^2}{2} \quad =>$$

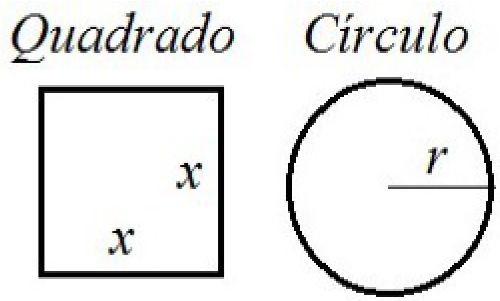
$$x=\frac{r}{\sqrt{2}}=r\frac{\sqrt{2}}{2}$$

As dimensões são $x=r\frac{\sqrt{2}}{2}$ *e* $y=x=r\frac{\sqrt{2}}{2}$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade II – Aplicações de derivadas *2.3 – Modelagem e otimização.*

Ex. 20: Um arame de comprimento 16 cm é cortado em dois pedaços, sendo um dobrado em forma de quadrado e o outro em forma de círculo. Como devemos cortar o arame para que a soma das áreas seja a) mínima? b) máxima?



$$4x+2\pi r=16 \quad \Rightarrow \quad 2x+\pi r=8 \quad \Rightarrow \quad r=\frac{8-2x}{\pi}$$

$$S=x^2+\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad S=x^2+\pi\left(\frac{8-2x}{\pi}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad S=x^2+\frac{1}{\pi}(8-2x)^2$$

$$\frac{dS}{dx}=2x+\frac{2}{\pi}(8-2x)(-2) \quad \Rightarrow \quad \frac{dS}{dx}=2x-\frac{4}{\pi}(8-2x) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dS}{dx}=2x-1{,}27(8-2x) \quad => \quad \frac{dS}{dx}=4{,}54x-10{,}16$$

$$\frac{dS}{dx}=0 \quad => \quad 4{,}54x-10{,}06=0 \quad => \quad x=\frac{10{,}56}{4{,}54}=2{,}24$$

$$\frac{d^2S}{dx^2}=4{,}54>0 \quad => \quad x=2{,}24$$ *é um ponto de mínimo. Para obtermos a soma das áreas mínimas devemos cortar o arame em* $4x=8{,}96$ *e* $16-4x=16-8{,}96=7{,}04$ *. Neste caso,*

$$S=2{,}24^2+\frac{1}{\pi}(8-2.2{,}24)^2 \quad => \quad S=5{,}02+0{,}32.3{,}52^2 \quad => \quad S=8{,}98$$

$r=0 \quad => \quad 4x=16 \quad => \quad x^2=16 \quad => \quad S=16$

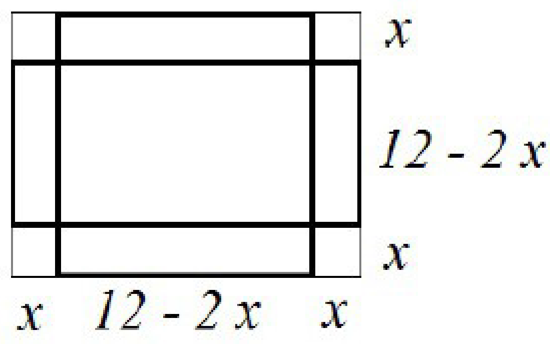
$4x=0 \quad => \quad 2\pi r=16 \quad => \quad r=2{,}55 \quad => \quad S=\pi r^2=20{,}42$

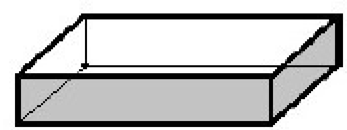
Portanto, um mínimo local de valor $S=8{,}98$ *e um máximo*

absoluto de valor $S=20{,}42$

Unidade II – Aplicações de derivadas *2.3 – Modelagem e otimização.*

Ex. 21: Uma caixa sem tampa será feita recortando-se pequenos quadrados congruentes dos cantos de uma folha de estanho medindo 12 por 12 cms e dobrando-se os lados para cima. Que tamanho os quadrados das bordas devem ter para que a caixa chegue à sua capacidade máxima?





$$V = x(12-2x)(12-2x) \quad => \quad V = 4x(6-x)(6-x) \quad =>$$

$$V = 4x(36-12x+x^2) \quad => \quad V = 4(36x-12x^2+x^3)$$

$$\frac{dV}{dx}=4(36-24x+3x^2)$$

$$\frac{dV}{dx}=0 \quad => \quad 36-24x+3x^2=0 \quad => \quad 12-8x+x^2=0 \quad =>$$

$x=2$ *ou* $x=6$

$$\frac{d^2V}{dx^2}=4(6x-24)$$

$$\frac{d^2V}{dx^2}(2)=4(-12)=-48<0$$ => *um máximo em* $x=2$ *de valor*

igual a $V=4.2(6-2)(6-2)=8.16=128$

Cálculo Diferencial e Integral II

Ex. 22: Projetar uma lata de óleo com a forma de um cilindro reto de volume 1 litro (1000 cm^3). Que dimensões exigirão menos material?

$$V = \pi r^2 h \quad => \quad \pi r^2 h = 1000 \quad => \quad h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} \quad => \quad S = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi r - \frac{2000}{r^2}$$

$$\frac{dS}{dr} = 0 \quad => \quad 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = 0 \quad => \quad 4\pi r^3 = 2000 \quad =>$$

$$r^3 = \frac{2000}{4\pi} \quad => \quad r^3 = 159{,}1549 \quad => \quad r = 5{,}42$$

$$\frac{d^2S}{dr^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^3} \quad => \quad \frac{d^2S}{dr^2} > 0 \quad =>$$ *o gráfico é côncavo para cima, portanto um ponto de mínimo.*

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \quad => \quad h = \frac{1000}{3{,}16 . 5{,}42^2} \quad => \quad h = 10{,}84$$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade II – Aplicações de derivadas *2.3 – Modelagem e otimização.*

Ex. 23: Suponha que $R(x)=9x$ *e* $C(x)=x^3-6x^2+15x$ *representem a receita e o custo de x unidades de um determiando produto fabricados em uma indústria. Há um nível de produção que maximize o lucro? Se hover, qual é?*

$$R(x)=9x$$

$$C(x)=x^3-6x^2+15x$$

$$L(x)=R(x)-C(x)=9x-(x^3-6x^2+15x)$$

$$L(x)=-x^3+6x^2-6x$$

$$L'(x)=-3x^2+12x-6$$

$$L'(x)=0 \quad => \quad -3x^2+12x-6=0 \quad => \quad -x^2+4x-2=0$$

Cálculo Diferencial e Integral II

Unidade II – Aplicações de derivadas *2.3 – Modelagem e otimização.*

$$=> \quad x=2-\sqrt{2}=0{,}586 \quad ou \quad x=2+\sqrt{2}=3{,}414$$

$$L''(x)=-6x+12$$

$$L''(0{,}586)=-6.0{,}586+12=12-3{,}516=8{,}484>0 \quad =>$$

concavidade voltada para cima. Portanto, um mínimo em $x=0{,}586$

$$L''(3{,}414)=-6.3{,}414+12=12-20{,}484=-8{,}484<0 \quad =>$$

concavidade voltada para baixo. Portanto, um máximo em $x=3{,}414$

$$L(x)=-x^3+6x^2-6x$$

$$L(3{,}414)=-3{,}414^3+6.3{,}414^2-6.3{,}414=9{,}657 \quad \textit{(lucro máximo)}$$

$$L(0{,}586)=-0{,}586^3+6 0{,}586^2-6 0{,}586=-1{,}657 \quad \textit{(perda máxima)}$$

"O solo sulcado, a terra preparada, o grão na cova e a vigilância do lavrador, por melhores condições em que se encontrem, dependem dos recursos divinos a se manifestarem no sol, na chuva ou nos granizos e no vento...

Levantemo-nos, quanto possível, através da oração lenificadora e inspirativa, para sairmos a servir e atender, agindo com segurança e acerto. "

Joana de Ângelis