# Cálculo Diferencial e Integral II

Curso de
Engenharia
Civil

Período 2014.2

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

# Cálculo Diferencial e Integral II

**E-mails:**

damasceno12@hotmail.com
damasceno12@uol.com.br
damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info
damasceno.info

# Cálculo Diferencial e Integral II

“Narra Leão Tolstoi que um sacerdote convidou um lavrador a orar, e este, que se encontrava na gleba laborando, respondeu não poder acompanhá-lo à oração porque arava. Após meditar, obtemperou o ministro da fé religiosa: fazes bem, pois que arar é também orar... ”

Joana de Ângelis

# Cálculo Diferencial e Integral II

**Unidade I** - Derivadas

*1.0 - Função derivada*

Seja $f$ uma função derivável em todo ponto $x$ de um intervalo aberto $I$. A função definida por

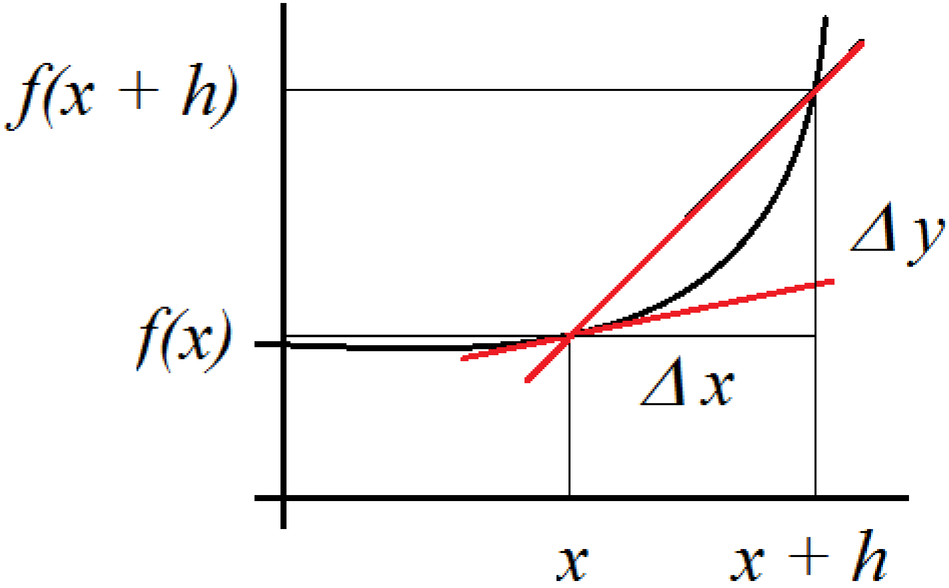
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

é chamada de **derivada da função $f$ no ponto $x$**

# Cálculo Diferencial e Integral II

**Unidade I** - Derivadas

*1.0 - Função derivada*




$$\Delta x = h$$

$$\Delta y = f(x+h) - f(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

# Cálculo Diferencial e Integral II

**Unidade I** - Derivadas

*Notações:*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$D_x y = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

# Cálculo Diferencial e Integral II

## **Unidade I** - Derivadas

*Ex. 1: Mostre que a reta* $y = mx + n$ *é sua própria tangente em qualquer ponto* $(a, b)$.

$$b = ma + n$$
$$y'(x) = m$$
$$y - b = y'(a)(x - a)$$
$$y - b = m(x - a)$$
$$y = b + mx - ma$$
$$y = ma + n + mx - ma$$
$$y = mx + n$$

**Unidade I** - Derivadas

*Ex. 2: a) Determine o coeficiente angular da curva $y = 1/x$ em $x = a$.*

*b) Onde o coeficiente angular é - 1/4?*

*c) O que acontece com a tangente a curva no ponto (a, 1/a) quando a varia?*

*a) Dado $y = 1/x$, o coeficiente angular em $x = a$ é:*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-1}{a(a+h)}=\frac{-1}{a^2}$$

# Cálculo Diferencial e Integral II

**Unidade I** - Derivadas

*b) coeficiente angular igual a -1/4 para a:*

$$\frac{-1}{a^2} = \frac{-1}{4} \quad => \quad a^2 = 4 \quad => \quad a = 2 \text{ ou } a = -2$$

*nos pontos (2, 1/2) e (- 2, - 1/2).*

*c) $f'(a) = -1/a^2$ é sempre negativo.*

*Quando $a \to 0^+$, $-1/a^2 \to -\infty$ e*

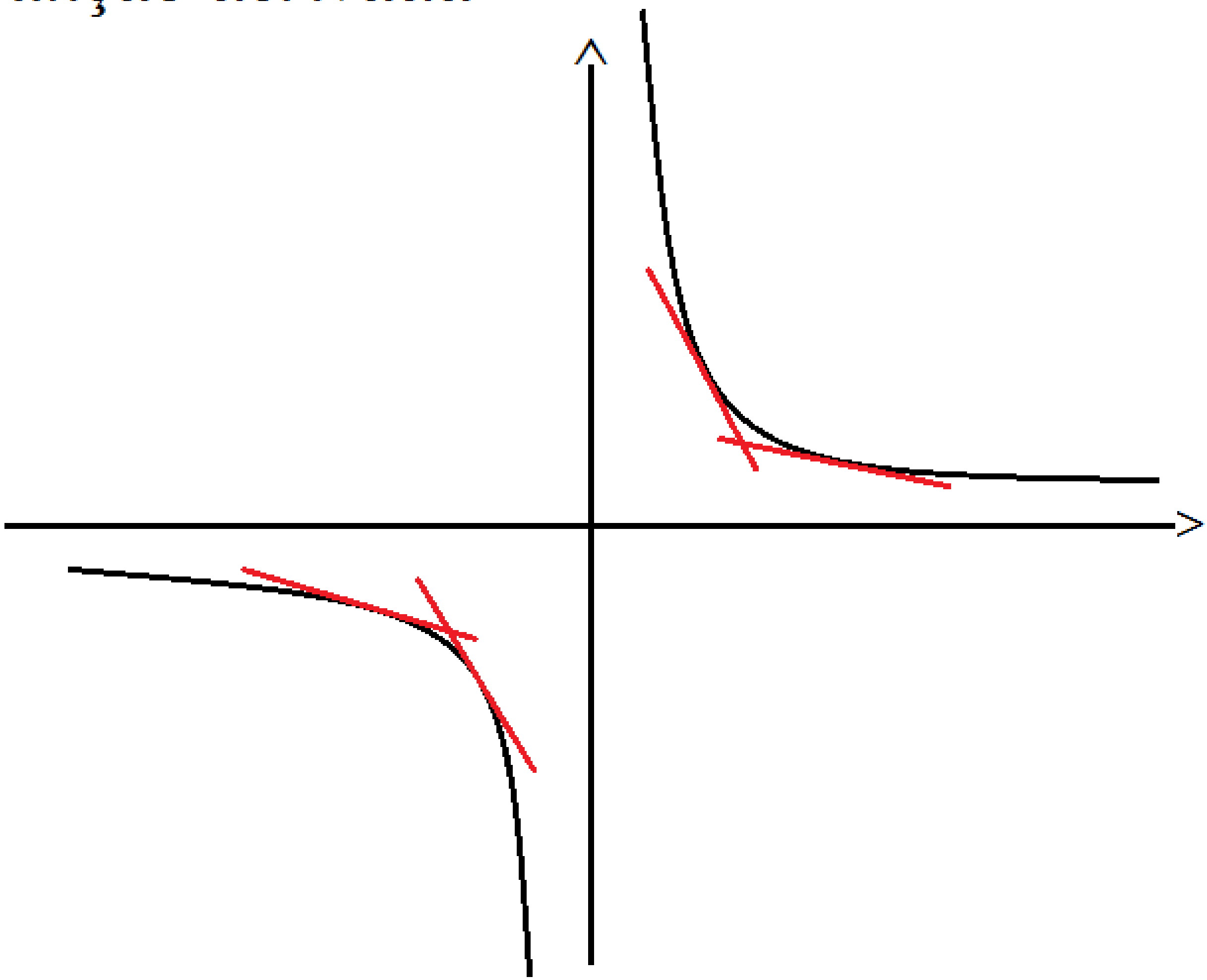
*quando $a \to 0^-$, $-1/a^2 \to -\infty$.*

*Quando a se afasta da origem em qualquer direção, o coeficiente angular tende a 0.*

# Cálculo Diferencial e Integral II

**Unidade I** - Derivadas

*1.0 - Função derivada*



# Cálculo Diferencial e Integral II

**Unidade I** - Derivadas

*1.1 - Regras básicas de derivação*

*Regra 1: Se $f(x) = c$, então* $\frac{df}{dx} = 0.$

*Prova da Regra 1:*

$$f(x+h) = c$$

$$f(x+h) - f(x) = c - c = 0$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

**Unidade I** - Derivadas

*1.1 - Regras básicas de derivação*

*Regra 1:* Se $f(x) = c$, então $\dfrac{df}{dx} = 0.$

Ex. 3: Se $f(x) = 3$, então $f\,'(x) = 0$;

Se $f(x) = -2$, então $f\,'(x) = 0$;

Se $f(x) = 18$, então $f\,'(x) = 0$;

Se $f(x) = -18$, então $f\,'(x) = 0$.

# Cálculo Diferencial e Integral II

**Unidade I** - Derivadas *1.1 - Regras básicas de derivação*

*Regra 2: Se* $f(x) = x^n$, *então* $\dfrac{df}{dx} = n\,x^{n-1}$.

*Prova da Regra 2:* *Se* $f(x) = x$, *então* $f\,'(x) = 1$

$$f(x+h) = x+h$$

$$f(x+h) - f(x) = x+h-x = h$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

# Cálculo Diferencial e Integral II

**Unidade I** - Derivadas *1.1 - Regras básicas de derivação*

*Regra 2: Se* $f(x) = x^n$, *então* $\dfrac{df}{dx} = n x^{n-1}$.

*Prova da Regra 2:* *Se* $f(x) = x^2$, *então* $f'(x) = 2x$

$$f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$$

$$f(x+h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$$

# Cálculo Diferencial e Integral II

**Unidade I** - Derivadas *1.1 - Regras básicas de derivação*

*Prova da Regra 2:* *Se* $f(x) = x^3$, *então* $f'(x) = 3x^2$

$$f(x+h)=(x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3$$

$$f(x+h)-f(x)=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3$$

$$f(x+h)-f(x)=3x^2h+3xh^2+h^3$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}3x^2+3xh+h^2=3x^2$$

**Unidade I** - Derivadas *1.1 - Regras básicas de derivação*

*Prova da Regra 2:*

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^4-b^4=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$$

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$$

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^n-x^n=$$

$$h((x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\ldots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}))$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\ldots+(x+h)x^{n-2}+x^{n-1}$$

# Cálculo Diferencial e Integral II

**Unidade I** - Derivadas *1.1 - Regras básicas de derivação*

*Regra 2: Se* $f(x) = x^n$, *então* $\dfrac{df}{dx} = n\,x^{n-1}$.

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \ldots + (x+h)\,x^{n-2} + x^{n-1}\right]$$

$$\frac{df}{dx} = x^{n-1} + x^{n-2}x + \ldots + x\,x^{n-2} + x^{n-1} = n\,x^{n-1}$$

$$\frac{df}{dx} = n\,x^{n-1}$$

# Cálculo Diferencial e Integral II

**Unidade I** - Derivadas *1.1 - Regras básicas de derivação*

*Regra 2:* Se $f(x) = x^n$, então $\dfrac{df}{dx} = n\,x^{n-1}$.

*Ex. 4:* Se $f(x) = x$, então $f\,'(x) = 1$;

Se $f(x) = x^2$, então $f\,'(x) = 2x$;

Se $f(x) = x^3$, então $f\,'(x) = 3x^2$;

Se $f(x) = x^4$, então $f\,'(x) = 4x^3$;

Se $f(x) = x^{4100}$, então $f\,'(x) = 4100x^{4099}$;

Se $f(x) = x^{-100}$, então $f\,'(x) = -100\,x^{-101}$;

Se $f(x) = x^{-1}$, então $f\,'(x) = -1x^{-2}$.

# Cálculo Diferencial e Integral II

**Unidade I - Derivadas** *1.1 - Regras básicas de derivação*

*Regra 3: Se* $f = k\,v$, *então* $\dfrac{df}{dx} = k\dfrac{dv}{dx}$.

*Ex. 5: Se* $f(x) = 5x$, *então* $f'(x) = 5.1 = 5$;

*Se* $f(x) = 4x^2$, *então* $f'(x) = 4.2x = 8x$;

*Se* $f(x) = 8x^3$, *então* $f'(x) = 8.3x^2 = 24x^2$;

*Se* $f(x) = 0{,}25x^4$, *então* $f'(x) = 0{,}25.4x^3 = x^3$;

*Se* $f(x) = 0{,}01x^{4100}$, *então* $f'(x) = 41x^{4099}$.

# Cálculo Diferencial e Integral II

**Unidade I** - Derivadas *1.1 - Regras básicas de derivação*

*Regra 4: Se* $f = u + v$, *então* $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

*Se* $f = u - v$, *então* $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{du}{dx} - \dfrac{dv}{dx}$

*Ex. 6:* $y = x^4 + 12x.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^4\right) + \frac{d}{dx}\left(12x\right) = 4x^3 + 12.$$

$$y = x^4 - 12x.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^4\right) - \frac{d}{dx}\left(12x\right) = 4x^3 - 12.$$

# Cálculo Diferencial e Integral II

**Unidade I** - Derivadas *1.1 - Regras básicas de derivação*

*Ex. 7:* $y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 7x + 1.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(\frac{4}{3}x^2) - \frac{d}{dx}(7x) + \frac{d}{dx}(1)$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + \frac{8}{3}x - 7.$$

$$y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 - 7x^2 + x.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^5) - \frac{d}{dx}(\frac{5}{3}x^3) - \frac{d}{dx}(7x^2) + \frac{d}{dx}(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 5x^2 - 14x + 1$$

**Unidade I - Derivadas** *1.1 - Regras básicas de derivação*

*Ex. 8: Determine os pontos da curva* $y = x^4 - 2x^2 + 2$ *onde a reta tangente é horizontal.*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) - \frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dx}(2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad => \quad 4x^3 - 4x = 0 \quad => \quad 4x(x^2 - 1) = 0$$

**Unidade I - Derivadas** *1.1 - Regras básicas de derivação*

*Ex. 8: Determine os pontos da curva* $y=x^4-2x^2+2$ *onde a reta tangente é horizontal.*

$4x(x^2-1)=0 \quad => \quad x=0, x=1, x=-1$

$y=x^4-2x^2+2$

$x=0 \quad => \quad y = 0-0+2 = 2$

$x=1 \quad => \quad y = 1-2+2 = 1$

$x=-1 \quad => \quad y = 1-2+2 = 1$

*Pontos da curva:* $(0,2),(1,1),(-1,1)$

**Unidade I** - Derivadas *1.1 - Regras básicas de derivação*

*Regra 5: Se* $f = u\,v$, *então* $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{du}{dx}v + u\dfrac{dv}{dx}$.

*Ex. 9: Ache* $f'(x)$ *se* $f(x) = (4x^2 - 1)(7x^3 + x)$.

$u = 4x^2 - 1$ $v = 7x^3 + x$

$\dfrac{du}{dx} = 8x$ $\dfrac{dv}{dx} = 21x^2 + 1$

$$\frac{df}{dx} = 8x(7x^3 + x) + (4x^2 - 1)(21x^2 + 1)$$

**Unidade I - Derivadas** *1.1 - Regras básicas de derivação*

*Ex. 10: Encontre a derivada de* $f(x) = \frac{1}{x}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right).$

$$u = \frac{1}{x} = x^{-1} \qquad v = x^2 + \frac{1}{x}$$

$$\frac{du}{dx} = -1x^{-2} = \frac{-1}{x^2} \qquad \frac{dv}{dx} = 2x - \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{df}{dx} = -\frac{1}{x^2}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\left(2x - \frac{1}{x^2}\right) = -1 - \frac{1}{x^3} + 2 - \frac{1}{x^3}$$

$$\frac{df}{dx} = 1 - \frac{2}{x^3}$$

**Unidade I - Derivadas** *1.1 - Regras básicas de derivação*

*Ex. 11: Seja $y = uv$ o produto de duas funções $u$ e $v$.*

*Determine $y'(2)$ se $u(2) = 3$, $u'(2) = -4$, $v(2) = 1$ e $v'(2) = 2$.*

$$y' = (uv)' \quad => \quad y' = u'v + uv' \quad ou$$

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

*Para $x = 2$ temos:*

$$y'(2) = u'(2)v(2) + u(2)v'(2) \quad =>$$

$$y'(2) = -4.1 + 3.2 \quad => \quad y'(2) = -4 + 6 = 2$$

"O solo sulcado, a terra preparada, o grão na cova e a vigilância do lavrador, por melhores condições em que se encontrem, dependem dos recursos divinos a se manifestarem no sol, na chuva ou nos granizos e no vento...

Levantemo-nos, quanto possível, através da oração lenificadora e inspirativa, para sairmos a servir e atender, agindo com segurança e acerto. "

Joana de Ângelis