Cálculo Diferencial e Integral I

Curso de
Engenharia
Civil

Período 2014.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Cálculo Diferencial e Integral I

E-mails:

damasceno12@hotmail.com
damasceno12@uol.com.br
damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info
damasceno.info

Cálculo Diferencial e Integral I

“Dominar-se a si próprio é uma vitória maior do que vencer a milhares em uma batalha.”

Nem teus piores inimigos podem fazer tanto dano como teus próprios pensamentos.

Buda

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VIII – Derivadas

8.5 – Regras de derivação

(11) $\boxed{f(x)=u(x)+v(x)}$

$$\boxed{f'(x)=u'(x)+v'(x)}$$

Exemplos: $\boxed{f(x)=x^4+x^3}$

$$\boxed{f'(x)=4x^3+3x^2}$$

$$\boxed{f(x)=x^8+x^6+x^4+x^2}$$

$$\boxed{f'(x)=8x^7+6x^5+4x^3+2x}$$

$$\boxed{f(x)=\cos x+sen\, x}$$

$$\boxed{f'(x)=-sen\, x+\cos x}$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VIII – Derivadas

(12) $\boxed{f(x)=u(x)-v(x)}$

$$\boxed{f'(x)=u'(x)-v'(x)}$$

Exemplos: $\boxed{f(x)=x^4-x^3}$

$$\boxed{f'(x)=4x^3-3x^2}$$

$$\boxed{f(x)=x^8+x^6-x^4-x^2}$$

$$\boxed{f'(x)=8x^7+6x^5-4x^3-2x}$$

$$\boxed{f(x)=\cos x-sen\,x}$$

$$\boxed{f'(x)=-sen\,x-\cos x}$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VIII – Derivadas

(13) $\boxed{f(x)=u(x).v(x)}$

$$\boxed{f'(x)=u'(x).v(x)+u(x).v'(x)}$$

Exemplos: $\boxed{f(x)=x^4.x^3}$

$$\boxed{f'(x)=4x^3.x^3+x^4.3x^2=7x^6}$$

$$\boxed{f(x)=x^8.x^6+x^4.x^2}$$

$$\boxed{f'(x)=8x^7.x^6+x^8.6x^5+4x^3.x^2+x^4.2x}$$

$$\boxed{f(x)=sen\,x\,.\cos x}$$

$$\boxed{f'(x)=\cos x.\cos x+sen\,x\,.(-sen\,x)}$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VIII – Derivadas

(14) $\boxed{f(x)=k\,.\,v(x)}$

$$\boxed{f'(x)=0.\mathrm{v}(x)+k.v'(x)}$$

$$\boxed{f'(x)=k.v'(x)}$$

Exemplos: $\boxed{f(x)=8x^4}$

$$\boxed{f'(x)=8\,.\,4x^3}$$

$$\boxed{f(x)=15x^8-7x^6+3x^4-4x^2}$$

$$\boxed{f'(x)=8.15x^7-6.7x^5+4.3x^3-2.4x}$$

$$\boxed{f(x)=25\cos x}$$

$$\boxed{f'(x)=25(-sen\,x)=-25\,sen\,x}$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VIII – Derivadas

(15) $$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Exemplos: $$f(x)=\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=\frac{0.x-1.1}{x^2}=\frac{-1}{x^2}$$

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{1.(x+1)-(x-1).1}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VIII – Derivadas

Exemplos: $f(x) = tg\,x$

$$f(x) = \frac{sen\,x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos x - sen\,x\,(-sen\,x)}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cos x + sen\,x\,sen\,x}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2$$

$$f'(x) = (sec\,x)^2 = sec^2 x$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VIII – Derivadas

Exercício 1: Calcular a derivada da função $f(x)=5$ no ponto $x=4$.

$f'(x)=0$ => $f'(4)=0$

Exercício 2: Calcular a derivada da função $f(x)=2x+5$ no ponto $x=-3$.

$f'(x)=2$ => $f'(-3)=2$

Exercício 3: Calcular a derivada da função $f(x)=3x^2+10x-5$ no ponto $x=4$.

$f'(x)=6x+10$ => $f'(4)=6.4+10=24+10=34$

Exercício 4: Calcular a derivada da função $f(x)=\dfrac{1}{x}$ no ponto $x=-2$.

$f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}$ => $f'(-2)=\dfrac{-1}{(-2)^2}=\dfrac{-1}{4}$

Unidade VIII – Derivadas

Exercício 5: Seja $f(x)=\dfrac{1}{x}, x \neq 0,$ com x real. Ache a taxa de variação instantânea de y em relação a x para: (a) $x=1$ (b) $x=-1$

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f'(1)=\frac{-1}{1^2}=-1$$

$$f'(-1)=\frac{-1}{(-1)^2}=-1$$

Exercício 6: Seja $f(x)=\dfrac{1}{x^2}, x \neq 0,$ com x real. Ache a taxa de variação instantânea de y em relação a x num ponto genérico.

$$f'(x)=\frac{0.x^2-1.2x}{x^4}=\frac{-2x}{x^4}$$

$$f'(x)=\frac{-2}{x^3}$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VIII – Derivadas

Exercício 7: Dada a função $f(x)=x^2+3x+2,$ com x real, ache a declividade da reta tangente a curva (ao gráfico) no ponto $(2,12)$.

$f'(x)=2x+3$ $\qquad$ $f'(2)=7$

Exercício 8: Dada a função $f(x)=x^2+3x+2,$ com x real, ache a equação da reta tangente a curva (ao gráfico) no ponto $(2,12)$.

$f'(x)=2x+3$ $\qquad$ $f'(2)=7$

$y-b=m(x-a)$ $\qquad$ $y-12=7(x-2)$

$y-12=7x-14$ $\qquad$ $7x-y-2=0$

Unidade VIII – Derivadas

Exercício 9: Uma cidade X é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela moléstia depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia) é dado, aproximadamente, por $\boxed{f(t)=192t-t^3.}$

(a) Qual a taxa da expansão da epidemia após 4 dias?

(b) Qual a taxa da expansão da epidemia após 8 dias?

(c) Quantas pessoas serão atingidas pela epidemia no 5º dia?

$\boxed{f(t)=192t-t^3.}$ => $\boxed{f'(t)=192-3t^2.}$

(a) $\boxed{f'(4)=192-3.4^2=192-3.16=192-48=144}$

(b) $\boxed{f'(8)=192-3.8^2=192-3.64=192-192=0}$

(c) $\boxed{f(5)-f(4)=192.5-5^3-[192.4-4^3]}$ $=$

$\boxed{960-125-[768-64]=835-704=131}$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VIII – Derivadas

Exercício 10: Encontre a equação da reta tangente e da normal ao gráfico de $f(x)=e^x,$ em $x=0.$

Sabemos que a equação da reta tangente ao gráfico de *f* em $x = 0$ é dada por $y-b=m(x-a)$ onde $b=f(0),$ $m=f'(0)$ e $a=0.$ Como $f(x)=e^x$ e $f'(x)=e^x,$ temos que $b=f(0)=1, m=f'(0)=1.$ Portanto, $y-1=1(x-0)$ ou $y=x+1.$

A reta normal ao gráfico de *f* em $x = 1$ tem seu coeficiente angular dado por $\dfrac{-1}{m}=\dfrac{-1}{1}=-1$. Portanto, sua equação é dada por $y=-x+1.$

Unidade VIII - Derivadas

9 – Regra da cadeia.

Se $\boxed{z=f(y)}$ e $\boxed{y=g(x)}$, então

$$\boxed{\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}}$$

Exemplo: $\boxed{f(x)=(x+3)^4}$

$\boxed{y=x+3}$ $\boxed{z=y^4}$

$$\boxed{\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=4y^3.1=4y^3=4(x+3)^3}$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VIII - Derivadas

Exemplo: $f(x)=3e^{(2x+1)}$

$y=2x+1$

$z=3e^{y}$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=3e^{y}.2=6e^{y}=6e^{(2x+1)}$$

Exemplo: $f(x)=(2x+2)^{\left(\frac{1}{2}\right)}$

$y=2x+2$

$z=y^{\left(\frac{1}{2}\right)}$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}y^{\left(\frac{-1}{2}\right)}.2=y^{\left(\frac{-1}{2}\right)}$$

Unidade VIII - Derivadas

Exemplo: $f(x) = (x^2 - 5x + 6)^{108}$

$y = x^2 - 5x + 6$ $z = y^{108}$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = 108\,y^{107}.(2x-5) = 108(2x-5)\,y^{107}$$

Exemplo: $f(x) = \cos(sen(x^2 + 5x))$

$w = x^2 + 5x$ $y = sen\,w$ $z = y^{108}$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = 108\,y^{107}.(2x-5) = 108(2x-5)\,y^{107}$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VIII - Derivadas

10 – Derivação implícita.

Considere a função y = f(x) definida por $x = y^2$. Então,

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(y^2) \;\Rightarrow\; 1 = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{d}{dx}(y)$$

$$\Rightarrow\; 1 = 2yy'$$

Uma função explícita de y em x expressa y em termos de x e pode ser derivada de acordo com as regras estudadas até agora.

Algumas funções implícitas, do tipo $f(x, y) = 0$, não podem explicitar y em função de x.

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VIII - Derivadas

10 – Derivação implícita.

Exemplo: $x^2y - x + y^2 = 0$

$$x^2y - x + y^2 = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^2)y + x^2\frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^2)y + x^2\frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2xy + x^2y' - 1 + 2yy' = 0$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VIII - Derivadas

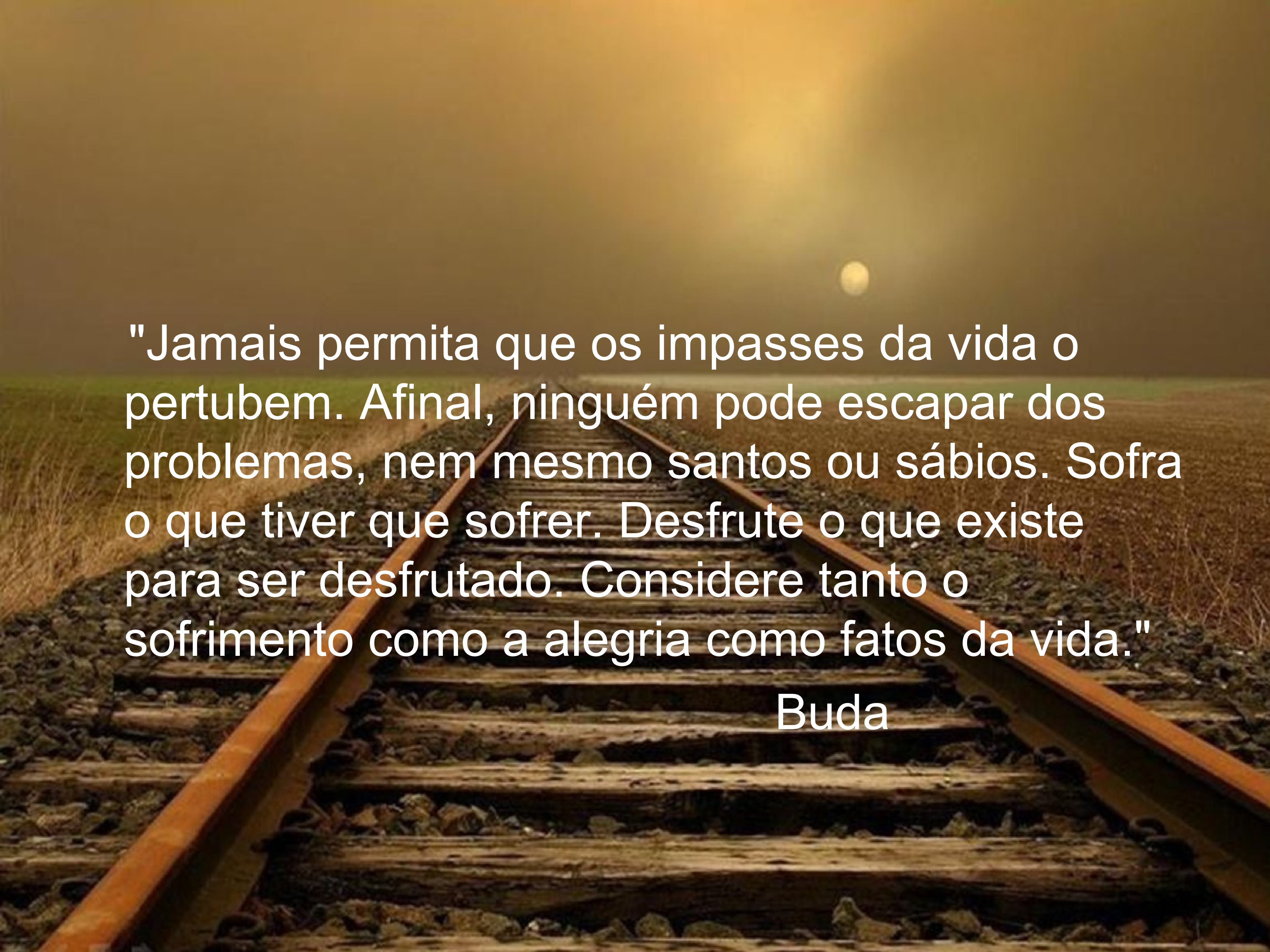
10 – Derivação implícita.

Exercícios: Calcular as derivadas das seguintes funções definidas implicitamente:

(1) $x^2 + xy - 2x = 1$ (2) $x^2y + 3xy^3 - x = 3$

(3) $y + seny = x$ (4) $x\cos y = y$

(5) $x^2 + y^2 = 1$ (6) $x^2\cos y + y^2 senx = 1$


"Jamais permita que os impasses da vida o pertubem. Afinal, ninguém pode escapar dos problemas, nem mesmo santos ou sábios. Sofra o que tiver que sofrer. Desfrute o que existe para ser desfrutado. Considere tanto o sofrimento como a alegria como fatos da vida."
Buda