Cálculo Diferencial e Integral I

Curso de
Engenharia
Civil

Período 2014.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Cálculo Diferencial e Integral I

E-mails:

damasceno12@hotmail.com
damasceno12@uol.com.br
damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info
damasceno.info

Cálculo Diferencial e Integral I

"Tendo o mínimo de desejos chega-se mais perto dos deuses."

"A vida sem ciência é uma espécie de morte."

"O que eu sei é que nada sei."

"Conhece-te a ti mesmo, torna-te consciente de tua ignorância e será sábio."

Sócrates

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

7.6 - Limites infinitos. Propriedades.

(1) Se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$, onde c é uma constante, então

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = +\infty + c = +\infty$$

(2) Se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$, onde c é uma constante, então

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = +\infty - c = +\infty$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

7.6 - Limites infinitos. Propriedades.

(3) Se $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$, onde *c* é uma constante, então

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = -\infty + c = -\infty$$

(4) Se $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$, onde *c* é uma constante, então

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = -\infty - c = -\infty$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

7.6 - Limites infinitos. Propriedades.

Exemplo 25: Se $\lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ e $\lim_{x \to 0} x + 3 = 3$, então

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} + x + 3 = +\infty + 3 = +\infty$$

(5) Se $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$, onde *c* é uma constante, então

$$c > 0 \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = +\infty \times c = +\infty$$

$$c < 0 \Rightarrow \quad \lim_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = +\infty \times c = -\infty$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

7.6 - Limites infinitos. Propriedades.

Exemplo 26: Se $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to 0} x + 3 = 3$, então

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right) \times (x+3) = +\infty \times 3 = +\infty$$

(6) Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, onde c é uma constante, então

$$c > 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = -\infty \times c = -\infty$$

$$c < 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = -\infty \times c = +\infty$$

Unidade VII – Limites.

7.7 - Limites no infinito

Se os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos de um número *L*, a medida que x cresce indefinidamente, então dizemos que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

Analogamente, se os valores de $f(x)$ ficam cada vez mais próximos de um número *L*, a medida que x decresce indefinidamente, então dizemos que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

7.7 - Limites no infinito

Exemplo 27: Determinar os limites das seguintes funções quando $x \to -\infty$ e $x \to \infty$

1. $\dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

2. $\dfrac{x^2 - 16}{x + 4}$

3. $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 5x + 6}$

4. $\dfrac{3x - 1}{9x^2 - 1}$

Cálculo Diferencial e Integral I

7.8 - Funções contínuas.

Dizemos que $y = f(x)$ é contínua no ponto $x = a$ se

1) existe o limite de $f(x)$ quando $x \to a$

2) $y = f(x)$ está definida no ponto $x = a$

3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Exemplo 26: A função $f(x) = x^2$ é contínua no ponto x = 0 pois

$$(1) \quad \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

$$(2) \quad f(0) = 0^2 = 0$$

$$(3) \quad \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0 = f(0)$$

Unidade VII – Limites.

7.8 - Funções contínuas.

Exemplo 27: A função $f(x) = \frac{1}{x},\ x \neq 0$ não é contínua no ponto x = 0 pois

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = não\ \ existe$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

7.8 - Funções contínuas.

Verifique se as seguintes funções são contínuas nos pontos indicados:

1) $f(x) = x^2$

2) $f(x) = x^3$

3) $f(x) = 2^x$

4) $f(x) = 2^{-x}$

5) $f(x) = 5x^2 - 8x + 5$

$nos \quad pontos \quad x = 0, \quad x = 1, \quad x = -1$

Unidade VII – Limites.

7.8 - Funções contínuas.

Verifique se as seguintes funções são contínuas nos pontos indicados:

6) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1} \quad x \neq 1, -1$

7) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 1}$

8) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 1}$

$nos \quad pontos \quad x = 0, \quad x = 1, \quad x = -1$

7.9 - Descontinuidades.

Descontinuidade Infinita

Uma função tem descontinuidade infinita em x = a, se f(x) tende para infinito (positivo ou negativo) nesse ponto.

Exemplo 28: A função $f(x) = \frac{1}{x},\ x \neq 0$ tem descontinuidade infinita no ponto x = 0 pois

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Neste caso, o salto é igual a

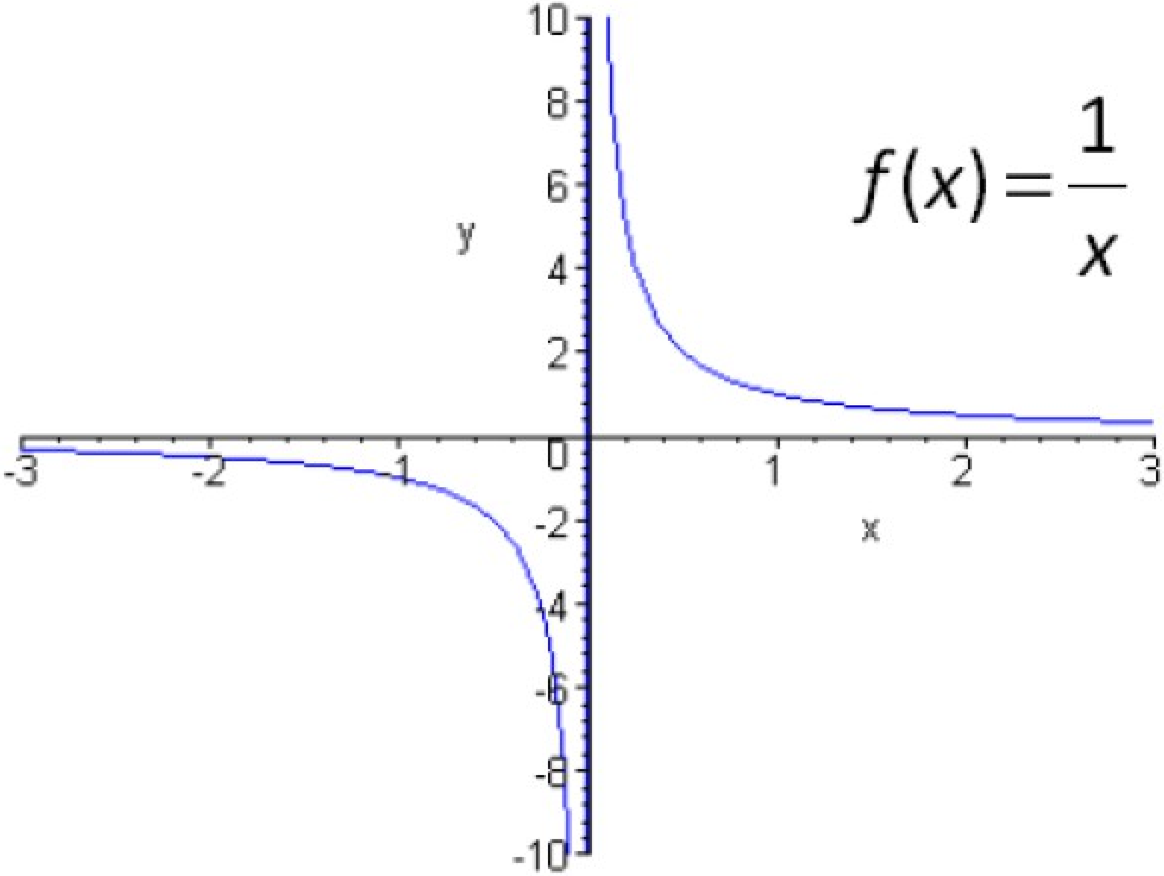
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} - \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = +\infty - (-\infty) = +\infty + \infty = +\infty$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

7.9 - Descontinuidades.

Descontinuidade Infinita



$$f(x)=\frac{1}{x}$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

7.9 - Descontinuidades.

Descontinuidade de Salto

Uma função tem descontinuidade de salto em $x = a$, quando $f(x)$ varia abruptamente neste ponto ($x = a$).

Exemplo 29: A função $f(x) = \dfrac{|x|}{x},\ x \neq 0$ tem descontinuidade de salto no ponto $x = 0$ pois

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

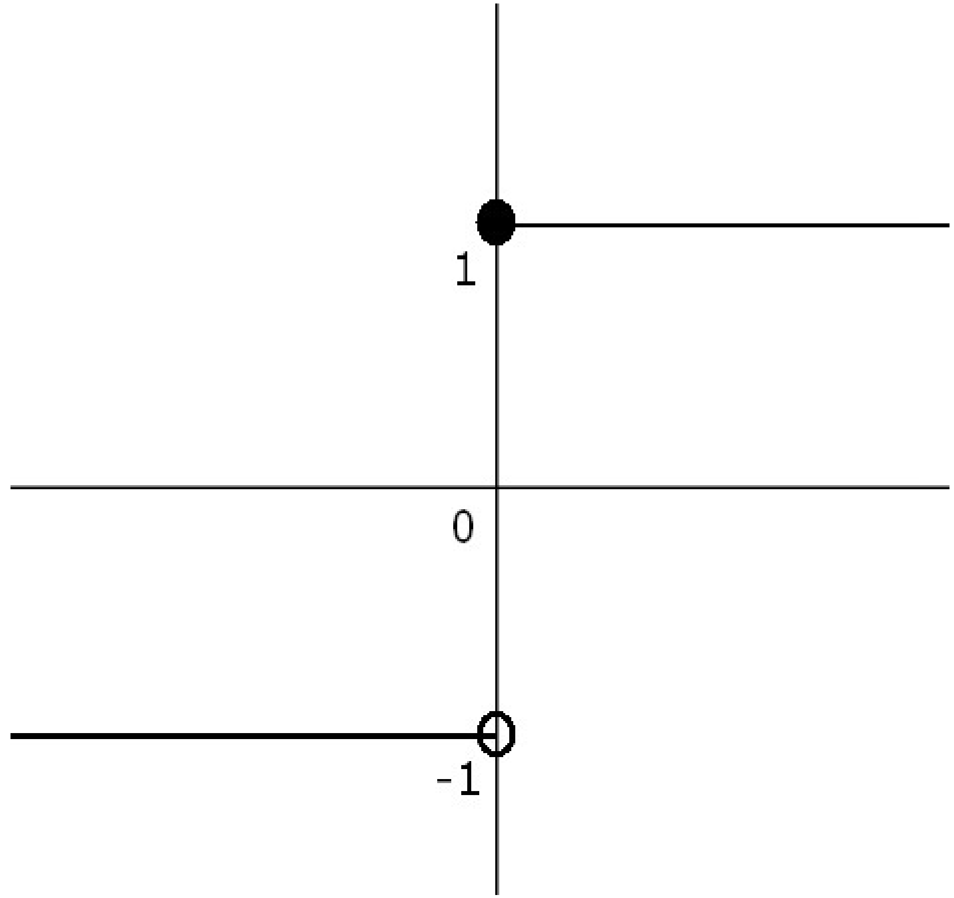
$$\text{salto} = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} - \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

7.9 - Descontinuidades.

Descontinuidade de Salto



Unidade VII – Limites.

7.9 - Descontinuidades.

Descontinuidade Removível

Quando existe $\lim_{x \to a} f(x)$, mas $f(x)$ não está definida em *a*.

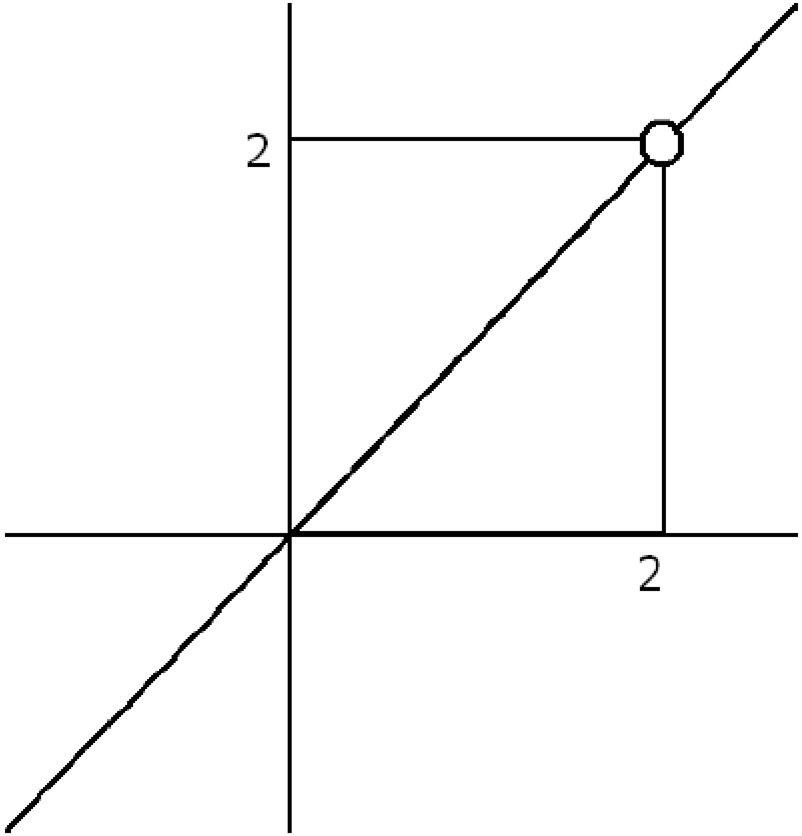
Exemplo 30: A função $f(x) = x,\ x \neq 2$ tem descontinuidade removível no ponto $x = 2$ pois $\lim_{x \to 2} x = 2$ e $f(x)$ não está definida no ponto $x = 2.$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

7.9 - Descontinuidades.

Descontinuidade Removível



Unidade VII – Limites.

7.9 - Descontinuidades.

Exercícios:

Determine os tipos de descontinuidades das seguintes funções:

(1) $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 3 \\ 2x+10, & x > 3 \end{cases}$

(3) $f(x) = \dfrac{4x^2 - 9}{2x+3}, \quad x \neq -3/2$

(2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x+3}, \quad x \neq -3$

(4) $f(x) = \dfrac{3x - 1}{9x^2 - 1}, \quad x \neq -1/3$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

7.10 - Propriedades

Se f e g são funções contínuas em $x = a$, então:

$f + g$ é contínua em $x = a;$

f - g é contínua em $x = a;$

f x g é contínua em $x = a;$

$f\ /\ g$ é contínua em $x = a$, desde que $g(a) \neq 0$.

Unidade VII – Limites.

7.11 - Continuidade em um intervalo

- Uma função é contínua em um intervalo aberto se, e somente se, ela for contínua para todo número do intervalo aberto.
- Em um intervalo fechado ou semi-aberto, devemos estender o conceito de continuidade para incluir os extremos, definindo:
  - Continuidade à direita
  - Continuidade à esquerda

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

7.11 - Continuidade em um intervalo

Continuidade à direita

Uma função f é contínua à direita de $x = a$, se e somente se:

(1) existe $f(a)$

(2) existe $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$

(3) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

Continuidade à esquerda

Uma função f é contínua à esquerda de $x = a$, se e somente se:

(1) existe $f(a)$

(2) existe $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$

(3) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

7.11 - Continuidade em um intervalo

Uma função é contínua em $[a,b]$ se e somente se:

- for contínua no intervalo aberto (a,b)
- for contínua à direita em a
- for contínua à esquerda em b

Exemplo 31: A função $f(x) = x^2$ é contínua no intervalo $[0,\ 2]$ pois

- é contínua no intervalo $(0,\ 2)$;

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

7.11 - Continuidade em um intervalo

– é continua a direita em 0, pois

(1) $f(0) = 0$

(2) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 = 0$

(3) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

– é continua a esquerda em 2, pois

(1) $f(2) = 2^2 = 4$

(2) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = 2^2 = 4$

(3) $\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$

"Existe apenas um bem, o saber, e apenas um mal, a ignorância."

"Não penses mal dos que procedem mal; pensa somente que estão equivocados."

"Conhece-te a ti mesmo e conhecerás o universo e os deuses."

Sócrates