Cálculo Diferencial e Integral I

Curso de
Engenharia
Civil

Período 2014.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Cálculo Diferencial e Integral I

E-mails:

damasceno12@hotmail.com
damasceno12@uol.com.br
damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info
damasceno.info

Cálculo Diferencial e Integral I

"Vocês todos são dotados de discernimento , vocês têm uma consciência sussurrando Retidão em seus ouvidos; assim, vocês mesmos são capazes de selecionar e escolher. Lustre sua mente e a grandeza sublime do Senhor estará refletida em seu coração."

Sai Baba

Unidade VII – Limites.

7.4 – Teoremas sobre limites

(1) Teorema da unicidade

Se existe $\lim_{x \to a} f(x)$, então este limite é único.

Dada uma função $f(x)$, se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$

Em palavras, só existe um único limite para uma função em um determinado ponto.

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

(2) Limite de uma função constante

$$\lim_{x \to a} c = c$$

Exemplo 05: $\lim_{x \to 3} 5 = 5$

$$\lim_{x \to 0} 5 = 5$$

$$\lim_{x \to -2} 5 = 5$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

(3) Limite da função identidade:

O limite da função identidade $f(x)=x$, quando, $x \to a$ é igual a a.

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Exemplo 06:

$$\lim_{x \to 3} x = 3$$

$$\lim_{x \to 0} x = 0$$

$$\lim_{x \to -3} x = -3$$

Unidade VII – Limites.

(4) Limite da função afim:

Se m e b são constantes quaisquer, então

$$\lim_{x \to a} mx + b = ma + b$$

Exemplo 07:

$$\lim_{x \to 4} (5x + 3) = 5 \times 4 + 3 = 20 + 3 = 23$$

$$\lim_{x \to -3} (-4x + 8) = -4 \times (-3) + 8 = 12 + 8 = 20$$

Unidade VII – Limites.

(5) Limite da soma:

O limite da soma é a soma dos limites

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

Exemplo 08: $\lim_{x \to 4} (5x + 3) = 23$

$$\lim_{x \to 4} (-4x + 8) = -8$$

$$\lim_{x \to 4} [(5x + 3) + (-4x + 8)] = \lim_{x \to 4} (5x + 3) + \lim_{x \to 4} (-4x + 8)$$

$$= 23 - 8 = 15$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

(6) Limite da diferença:

O limite da diferença é a diferença dos limites

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$

Exemplo 09: $\lim_{x \to 4} (5x + 3) = 23$

$$\lim_{x \to 4} (-4x + 8) = -8$$

$$\lim_{x \to 4} [(5x + 3) - (-4x + 8)] = \lim_{x \to 4} (5x + 3) - \lim_{x \to 4} (-4x + 8)$$

$$= 23 - (-8) = 31$$

Unidade VII – Limites.

(7) Limite do produto:

O limite do produto é o produto dos limites

$$\lim_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x)$$

Exemplo 10: $\lim_{x \to 4} (5x + 3) = 23$

$$\lim_{x \to 4} (-4x + 8) = -8$$

$$\lim_{x \to 4} [(5x + 3) \times (-4x + 8)] = \lim_{x \to 4} (5x + 3) \times \lim_{x \to 4} (-4x + 8)$$

$$= 23 \times (-8) = -184$$

Unidade VII – Limites.

(8) Limite do produto de uma constante por uma função:

$$\lim_{x \to a} (k\ g(x)) = k \lim_{x \to a} g(x)$$

Exemplo 11: $\lim_{x \to 4} 5 = 5$

$$\lim_{x \to 4} (-4x + 8) = -8$$

$$\lim_{x \to 4} [5(-4x + 8)] = \lim_{x \to 4} 5 \times \lim_{x \to 4} (-4x + 8)$$

$$= 5 \times (-8) = -40$$

Unidade VII – Limites.

(9) Limite do quociente:

O limite do quociente é o quociente dos limites:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Exemplo 12:

$$\lim_{x \to 4} (5x + 3) = 23 \qquad \lim_{x \to 4} (-4x + 8) = -8$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{5x + 3}{-4x + 8} = \frac{\lim_{x \to 4} (5x + 3)}{\lim_{x \to 4} (-4x + 8)} = \frac{23}{-8} = -2{,}875$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

(10) Limite da potência:

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$$

Exemplo 13:

$$\lim_{x \to 4} (5x - 17) = 3$$

$$\lim_{x \to 4} (5x - 17)^5 = [\lim_{x \to 4} (5x - 17)]^5 = 3^5 = 243$$

Unidade VII – Limites.

(11) Limite da raiz n-ésima:

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{[f(x)]} = \sqrt[n]{[\lim_{x \to a} f(x)]}$$

Exemplo 14:

$$\lim_{x \to 4} (5x - 17) = 3$$

$$\lim_{x \to 4} \sqrt[3]{(5x - 17)^5} = \sqrt[3]{\lim_{x \to 4} (5x - 17)]^5} = \sqrt[3]{3^5} = \sqrt[3]{243}$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

Exemplo 15: Se $f(x) = x$ temos:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} x = 3$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x = 0$$

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} x = -3$$

Exemplo 16: Se $f(x) = 10$ temos:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} 10 = 10$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} 10 = 10$$

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} 10 = 10$$

Unidade VII – Limites.

Exemplo 17: Se $f(x) = 3 - x$ temos:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} (3 - x) = \lim_{x \to 3} 3 - \lim_{x \to 3} x = 3 - 3 = 0$$

Exemplo 18: Se $f(x) = x^2 + 5x - 7$ temos:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (x^2 + 5x - 7) =$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 + \lim_{x \to 0} 5x - \lim_{x \to 0} 7 =$$

$$0 + 0 - 7 = -7$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

Exemplo 19: Se $f(x) = (x^2 + 4x - 1)(x^3 + 4)$

temos:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} [(x^2 + 4x - 1)(x^3 + 4)] =$$

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 4x - 1) \lim_{x \to 2} (x^3 + 4) =$$

$$= (\lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} 4x - \lim_{x \to 2} 1)(\lim_{x \to 2} x^3 + \lim_{x \to 2} 4) =$$

$$(4 + 8 - 1)(8 + 4) = 11 \times 12 = 132$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

Exemplo 20: Se $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ temos:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{\lim\limits_{x \to 3} x^2 - 1}{\lim\limits_{x \to 3} x^2 + 1} =$$

$$\frac{\lim\limits_{x \to 3} x^2 - \lim\limits_{x \to 3} 1}{\lim\limits_{x \to 3} x^2 + \lim\limits_{x \to 3} 1} = \frac{9 - 1}{9 + 1} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

Exemplo 21: Se $f(x) = (x^3 + 2x)^4$ temos:

$$\lim_{x \to 1} (x^3 + 2x)^4 =$$

$$[\lim_{x \to 1} (x^3 + 2x)]^4 =$$

$$(\lim_{x \to 1} x^3 + \lim_{x \to 1} 2x)^4 =$$

$$(1 + 2)^4 = 3^4 = 81$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

Exemplo 22: Se $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3 - 1}{x^3 + 1}}$ temos:

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}} = \sqrt{\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1}} =$$

$$\sqrt{\frac{\lim_{x \to 2} x^3 - 1}{\lim_{x \to 2} x^3 + 1}} = \sqrt{\frac{8 - 1}{8 + 1}} = \sqrt{\frac{7}{9}}$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

7.5 - Limites infinitos

Dizemos que a função f tem limite *infinito* $(+\infty)$ quando x se aproxima de *a*, se o valor de $f(x)$ se torna muito grande.

Denotamos esse fato por: $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$

Também costumamos dizer que $+\infty$ é o limite de $f(x)$ quando x tende para *a*.

Unidade VII – Limites.

7.5 - Limites infinitos

Dizemos que a função f tem limite menos infinito (-∞) quando x se aproxima de a, se o valor de $f(x)$ se torna negativo e muito grande em valor absoluto.

Denotamos esse fato por:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

7.5 - Limites infinitos

Exemplo 23: Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{x}, x \neq 0$

x	$f(x)$
-1	-1
-0,5	-2
-0,1	-10
-0,01	-100
-0,001	-1000
-0,0001	-10000

x	$f(x)$
1	1
0,5	2
0,1	10
0,01	100
0,001	1000
0,0001	10000

Podemos dizer então que:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

7.5 - Limites infinitos

Exemplo 23: Considere a função $f(x) = \dfrac{1}{x}, x \neq 0$

x	$f(x)$
-1	-1
-0,5	-2
-0,1	-10
-0,01	-100
-0,001	-1000
-0,0001	-10000

x	$f(x)$
1	1
0,5	2
0,1	10
0,01	100
0,001	1000
0,0001	10000

Podemos dizer então que:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Unidade VII – Limites.

Exemplo 24: Calcule os limites laterais e o limite da função $f(x)$ quando $x \to 0$, caso existam, onde:

$a)\ \ f(x) = \dfrac{1}{x^2}, x \neq 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Então, $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

$$b)\quad f(x) = \frac{1}{x^3},\ x \neq 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Então, $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^3} = \textit{não existe}$

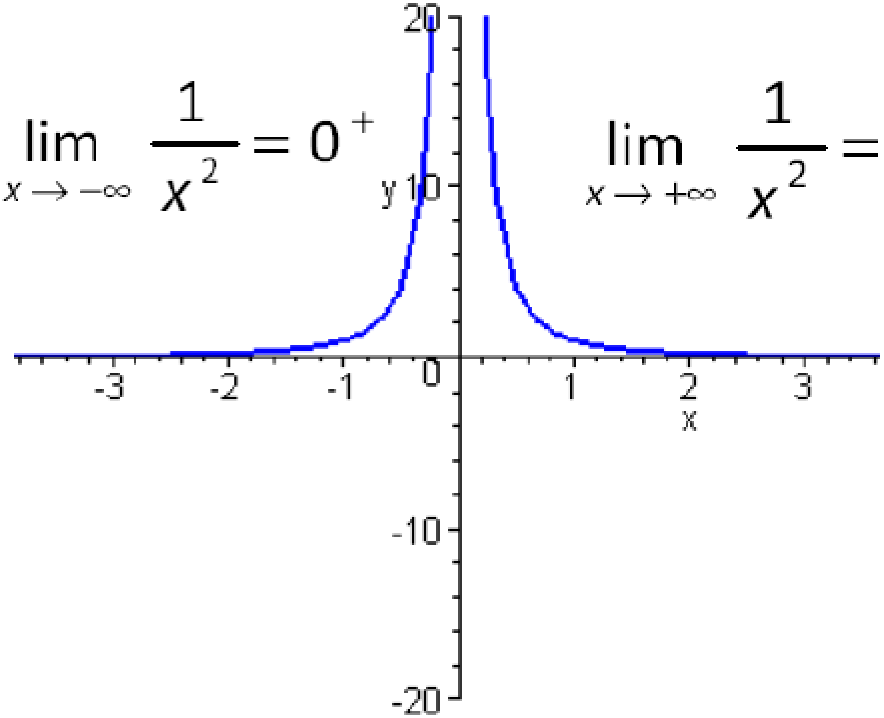
Unidade VII – Limites.

Gráfico de

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$$

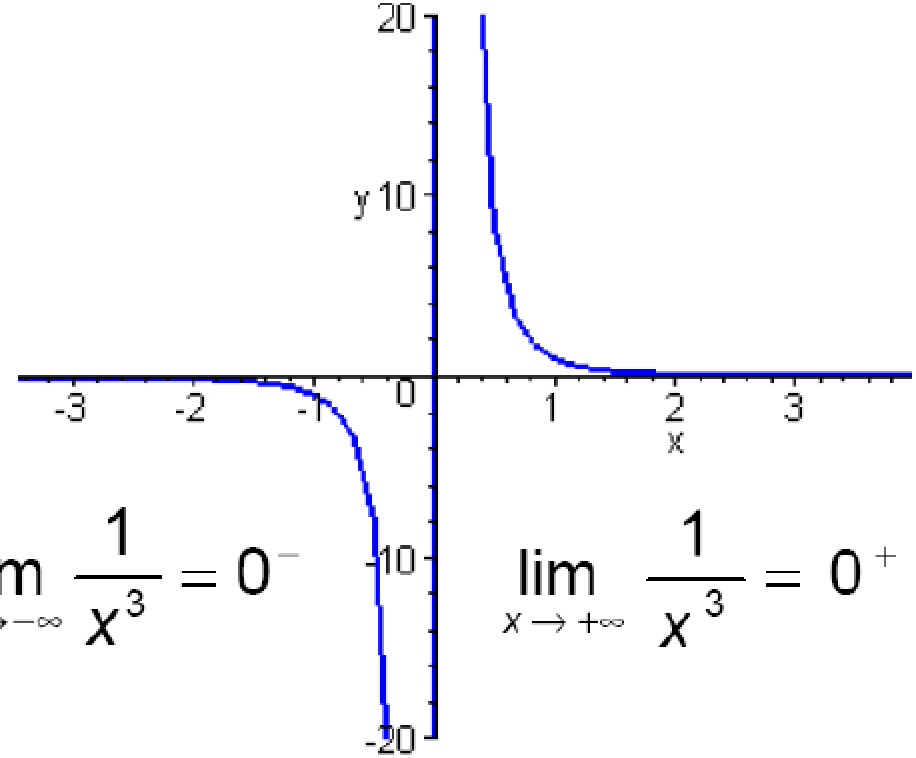
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0^+$$



Unidade VII – Limites.

Gráfico de

$$f(x) = \frac{1}{x^3}, x \neq 0$$



$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0^-$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0^+$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade VII – Limites.

7.5 - Limites infinitos

Se r é um número inteiro positivo, então

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^r} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$ se r for ímpar

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^r} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$ se r for par

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^r} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$ qualquer que seja r par ou ímpar.

"Assim como você alimenta o corpo e cuida da sua conservação e manutenção, a consciência e o intelecto também devem ser alimentados com alimentos bons e nutritivos. Se você não fizer isso, então eles terão fome e buscarão todos os tipos de alimento impróprio. Dêem-lhes alimentação adequada e eles funcionarão bem, iluminando o Atma e ajudando-os a perceber que o Atma está em tudo."

Sai Baba