Cálculo Diferencial e Integral I

Curso de
Engenharia
Civil

Período 2014.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Cálculo Diferencial e Integral I

E-mails:

damasceno12@hotmail.com
damasceno12@uol.com.br
damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info
damasceno.info

Cálculo Diferencial e Integral I

Se você quer transformar o mundo, experimente primeiro promover o seu aperfeiçoamento pessoal e realizar inovações no seu próprio interior. Estas atitudes se refletirão em mudanças positivas no seu ambiente familiar. Deste ponto em diante, as mudanças se expandirão em proporções cada vez maiores. Tudo o que fazemos produz efeito, causa algum impacto (Dalai Lama).

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função logarítmica.

O logarítmo de um número **b** em uma base **a** é um número real **x** tal que $a^x = b$.

Notação: $x = \log_a b$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0)$

$$x = \log_a b \iff a^x = b$$

Exemplos:

$$3 = \log_2 8 \iff 2^3 = 8$$

$$4 = \log_3 81 \iff 3^4 = 81$$

$$3 = \log_{10} 1000 \iff 10^3 = 1000$$

Unidade IV – Função logarítmica.

Assim, o logaritmo de um número real e positivo **b**, na base **a**, positiva e diferente de 1, é o número **x** ao qual se deve elevar **a** para se obter **b**.

$$\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b$$

x – logarítmo de b na base a

a – base

b – logaritmando

Exemplos:

$$\log_2 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^0 = 1$$

$$\log_3 3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 3^1 = 3$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função logarítmica. Propriedades

1) O logarítmo de 1 em qualquer base é igual a 0.

$$\log_a 1 = 0 \quad <=> \quad a^0 = 1$$

2) O logarítmo da base é igual a 1.

$$\log_a a = 1 \quad <=> \quad a^1 = a$$

3) O logarítmo de uma potência da base é igual ao expoente da potência.

$$\log_a a^k = k \quad <=> \quad a^k = a^k$$

4) a elevado ao logarítmo de b na base a é igual a b.

$$\log_a b = x \quad <=> \quad a^x = b \quad <=> \quad a^{\log_a b} = b$$

Unidade IV – Função logarítmica. Propriedades

Sejam a, b e c números reais positivos com $a \neq 1$.

5) Logarítmo do produto

$$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$$

$$\log_a b = x \quad \Longleftrightarrow \quad a^x = b$$

$$\log_a c = y \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = c$$

$$b\,.\,c = a^x\,.\,a^y \quad \Rightarrow \quad b\,.\,c = a^{x+y}$$

$$\log_a(b.c) = \log_a a^{x+y} = x + y = \log_a b + \log_a c$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função logarítmica. Propriedades

6) Logarítmo do quociente

$$\log_a(b / c) = \log_a b - \log_a c$$

$$\log_a b = x \quad <=> \quad a^x = b$$

$$\log_a c = y \quad <=> \quad a^y = c$$

$$b / c = a^x / a^y \quad => \quad b / c = a^{x-y}$$

$$\log_a(b / c) = \log_a a^{x-y} = x - y = \log_a b - \log_a c$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função logarítmica. Propriedades

7) Logarítmo da potência

$$\log_a b^m = m \log_a b$$

$$\log_a b = x \quad \Longleftrightarrow \quad a^x = b$$

$$(a^x)^m = b^m \quad \Longleftrightarrow \quad a^{mx} = b^m$$

$$\log_a b^m = \log_a a^{mx} = mx = m\log_a b$$

8) Dois logarítmos em uma mesma base são iguais se, e somente se, os logaritmandos são iguais.

$$\log_a b = \log_a c \quad \Longleftrightarrow \quad b = c$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função logarítmica. Propriedades

9) Mudança de base

$\log_a b = \log_c b \,/\, \log_c a$

$\log_c b = \log_a b \,.\, \log_c a$

$\log_c b = z \iff c^z = b$

$\log_a b = x \iff a^x = b$

$\log_c a = y \iff c^y = a$

$(c^y)^x = a^x \iff c^{xy} = b = c^z$

$z = xy \iff \log_c b = \log_a b \,.\, \log_c a$

Unidade IV – Função logarítmica. Definição.

Função logarítmica de base a é a função definida por

$$f(x) = \log_a x$$

Exemplos:

$$f(x) = \log_2 x$$
$$f(x) = \log_{1/2} x$$
$$f(x) = \log_{10} x = \log x$$
$$f(x) = \log_e x = \ln x$$

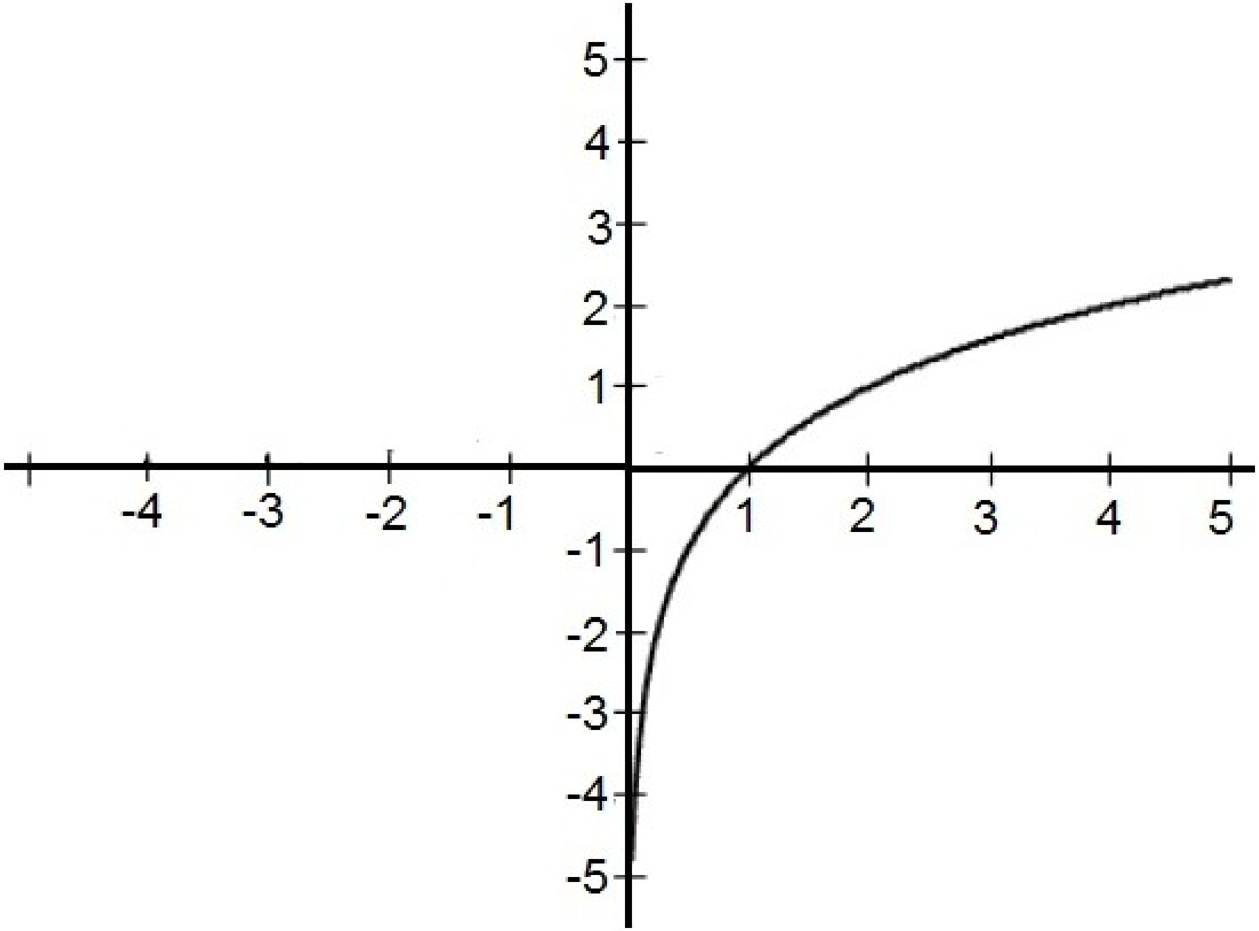
Se $a > 1$, então $f(x)$ é estritamente crescente.

Se $0 < a < 1$, então $f(x)$ é estritamente decrescente.

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função logarítmica. Gráficos.

x	$\log_2 x$
1/8	-3
1/4	-2
1/2	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

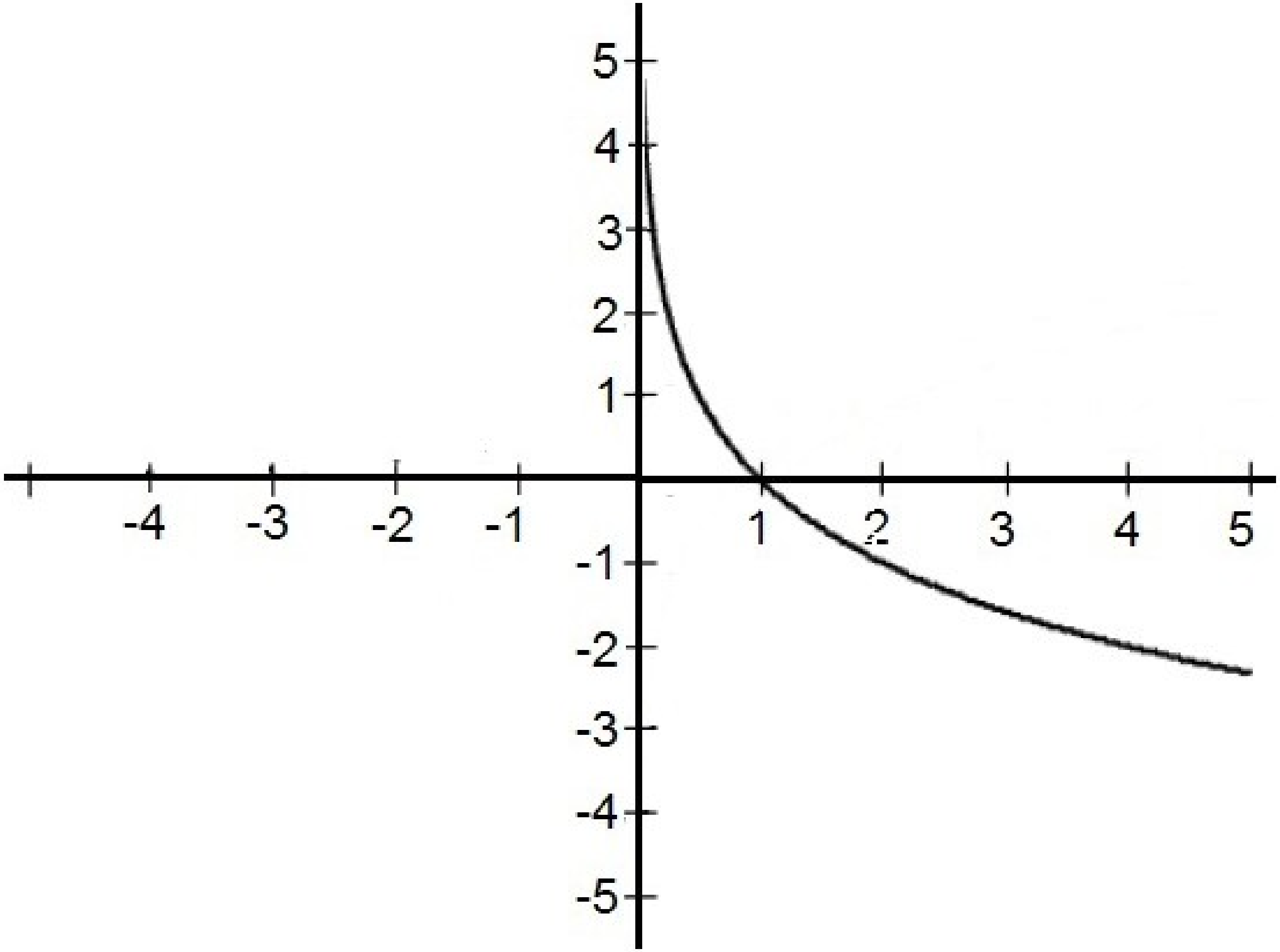


(a > 1)

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função logarítmica. Gráficos.

x	$\log_{1/2}x$
1/8	3
1/4	2
1/2	1
1	0
2	-1
4	-2
8	-3



$0 < a < 1$

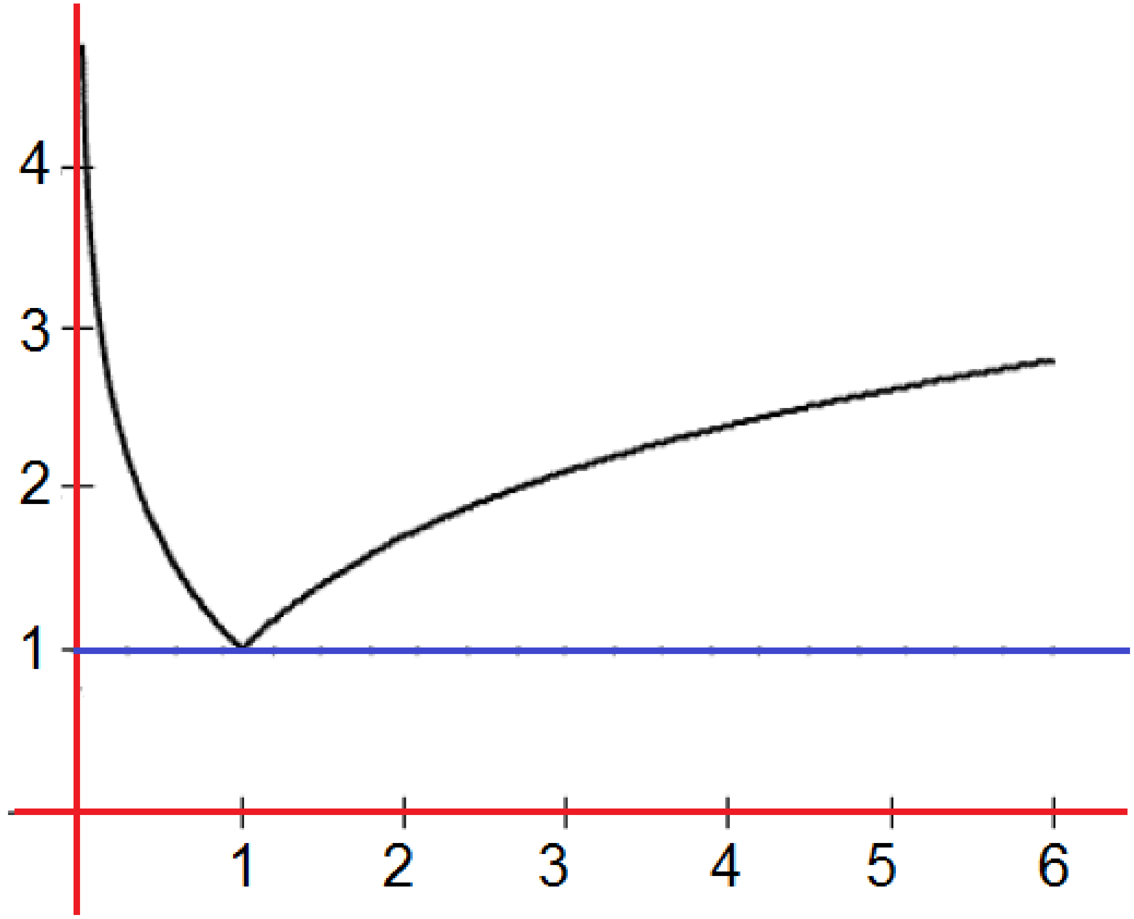
Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função logarítmica. Gráfico.

Exemplo: Esboce o gráfico da função

$$f(x) = 1 + |\log_2 x|$$

x	f(x)
1/8	4
1/4	3
1/2	2
1	1
2	2
4	3
8	4



Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função logarítmica. Função inversa.

Dada a função $y = f(x)$, dizemos que $y = g(x)$ é a função inversa de $y = f(x)$ se

$$f(g(x)) = x \qquad e \qquad g(f(x)) = x$$

Exemplo: $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^{1/2}$

$$f(g(x)) = f(x^{1/2}) = (x^{1/2})^2 = x$$

$$g(f(x)) = g(x^2) = (x^2)^{1/2} = x$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função logarítmica. Função inversa.

Exemplo: A função exponencial e a função logarítmica, uma é a inversa da outra.

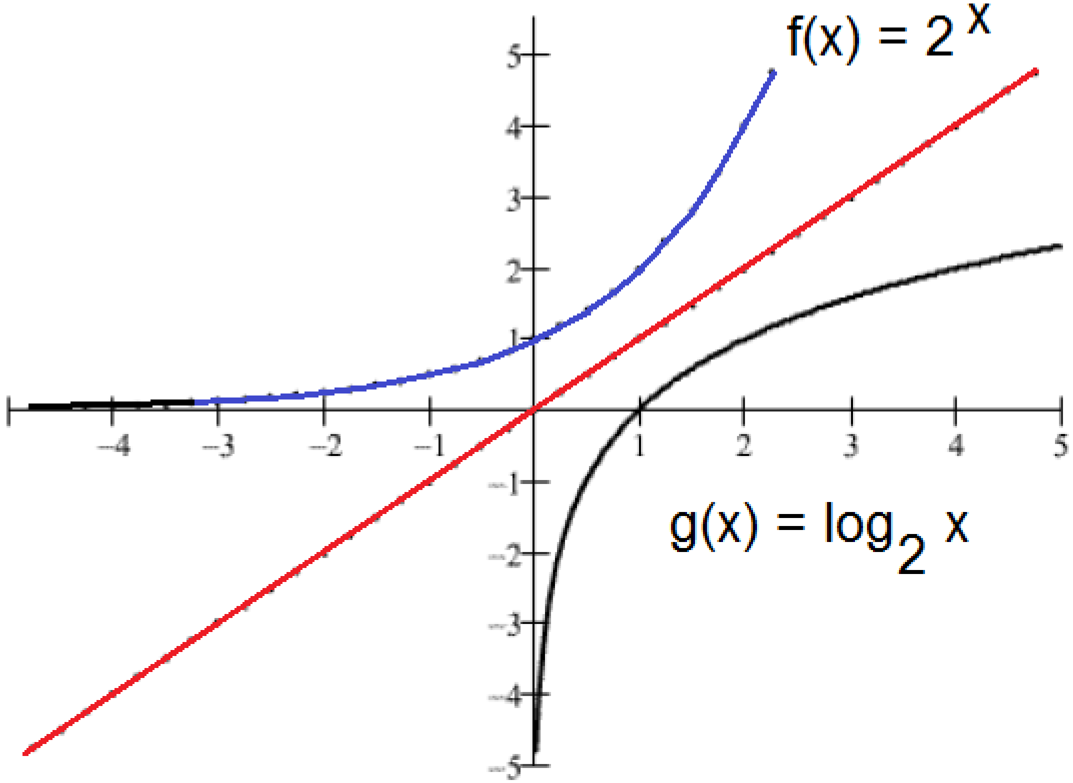
$$f(x) = a^x \qquad \text{e} \qquad g(x) = \log_a x$$

$$f(g(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$$

$$g(f(x)) = g(a^x) = \log_a a^x = x$$

Cálculo Diferencial e Integral I

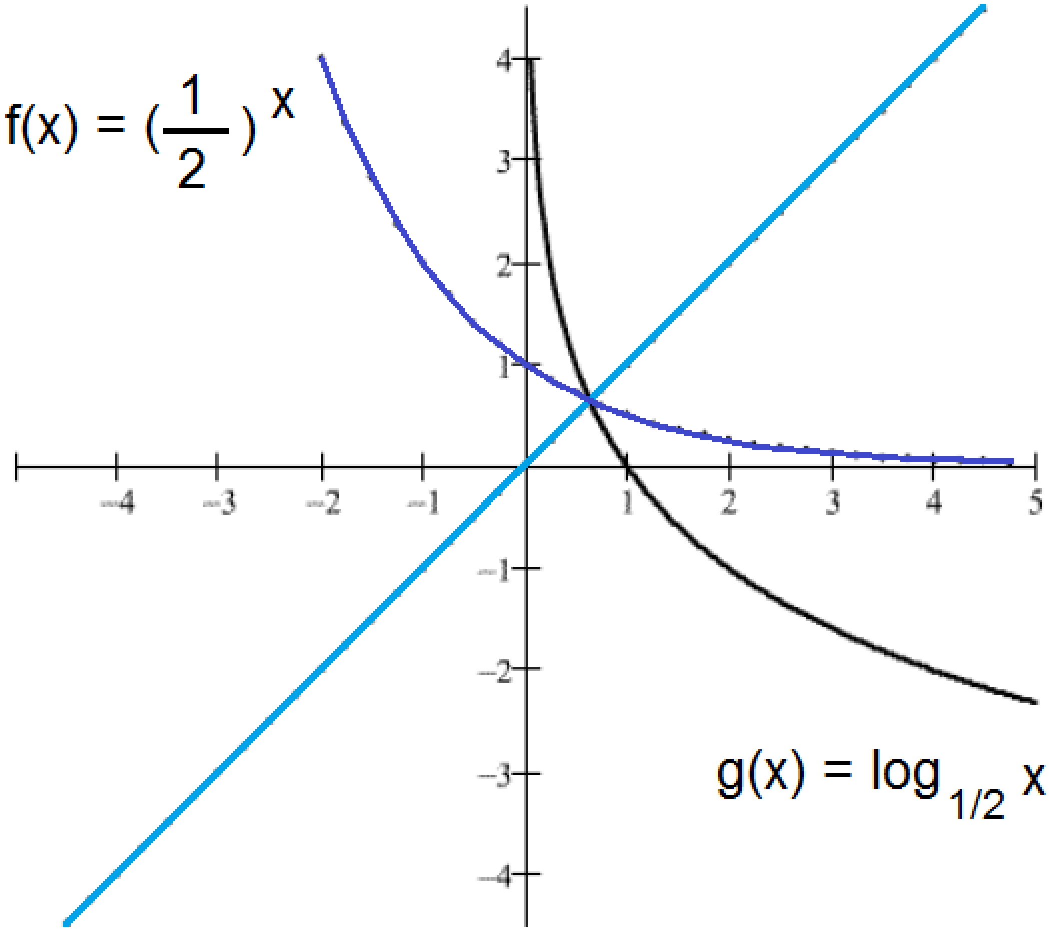
Unidade IV – Função logarítmica. Função inversa. Gráficos.



(a > 1)

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função logarítmica. Função inversa. Gráficos.



$(0 < a < 1)$

Unidade IV – Função logarítmica. Equação logarítmica.

Exemplo: $\log_2(x-3)=1$

$$x-3>0 \quad \Rightarrow \quad x>3$$

$$\log_2(x-3)=1 \quad \Rightarrow \quad x-3=2^1$$

$$\Rightarrow \quad x-3=2$$

$$\Rightarrow \quad x=5$$

Como $5>3$ a solução da equação é $x=5$.

Unidade IV – Função logarítmica. Equação logarítmica.

Exemplo: $\log_{x-2}(2x-4) = 2$

$$2x - 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad x - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 2$$

$$\begin{aligned}
\log_{x-2}(2x-4) = 2 \quad &\Rightarrow \quad (x-2)^2 = 2x - 4 \\
&\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 4 = 2x - 4 \\
&\Rightarrow \quad x^2 - 6x + 8 = 0 \\
&\Rightarrow \quad x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 4
\end{aligned}$$

Como $x > 2$ a solução da equação é $x = 4$.

Unidade IV – Função logarítmica. Domínio da função.

Exemplo: Determine o domínio da função

$$f(x) = \log_2 (x^2 - 1)$$

$x^2 - 1 > 0 \quad <=> \quad (x + 1)(x - 1) > 0$

$\quad <=> \quad x < -1 \quad \text{ou} \quad x > 1$

$$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

Unidade IV – Função logarítmica. Domínio da função.

Exemplo: Determine o domínio da função

$$f(x) = \log_{x-1}(2x - x^2)$$

1) $2x - x^2 > 0 \iff x(2 - x) > 0$

$\iff 0 < x < 2$

2) $x - 1 > 0 \iff x > 1$

3) $x - 1 \neq 1 \iff x \neq 2$

$$\mathrm{Dom}(f) = (1, 2)$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função logarítmica. Inequação logarítmica.

$$\log(2x-3) > \log(x-4)$$
$$2x-3 > x-4$$
$$x > -1$$

$$2x-3>0 \quad e \quad x-4>0$$
$$2x>3 \quad e \quad x>4$$
$$x>1{,}5 \quad e \quad x>4$$

Solução: $x > 4$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função logarítmica. Inequação logarítmica.

$$\log_{1/3}(2x - 3) > \log_{1/3}(x - 4)$$

$$2x - 3 < x - 4$$

$$x < -1$$

$$2x - 3 > 0 \quad \text{e} \quad x - 4 > 0$$

$$2x > 3 \quad \text{e} \quad x > 4$$

$$x > 1{,}5 \quad \text{e} \quad x > 4$$

Solução: Φ

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função logarítmica. Propriedades

O número e, base do logarítmo neperiano:

$$f(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad e \cong 2{,}7182818$$

$n = 1$ $\quad f(1) = 2$

$n = 2$ $\quad f(2) = 1{,}5^2 = 2{,}25$

$n = 3$ $\quad f(3) = 1{,}333^3 = 2{,}3659$

$n = 4$ $\quad f(4) = 1{,}25^4 = 2{,}4414$

....

$n = 10$ $\quad f(10) = 1{,}1^{10} = 2{,}5937$

....

$n = 100$ $\quad f(100) = 1{,}01^{100} = 2{,}7048$

....

$n = 1000$ $\quad f(1000) = 1{,}001^{1000} = 2{,}7169$

Unidade IV – Função logarítmica. Aplicações.

Exemplo: Uma pessoa deposita R$ 100.000,00 em uma conta cuja taxa anual de juros compostos é de 8% a.a. Em quanto tempo a quantia depositada duplicará?

$$M = C(1 + i)^{t}$$

$$200.000{,}00 = 100.000{,}00\ (1 + 0{,}08)^{t}$$

$$2 = 1{,}08^{t}$$

$$\log 2 = \log 1{,}08^{t}$$

$$\log 2 = t \log 1{,}08$$

$$t = (\log 2) / (\log 1{,}08)$$

$$t = 0{,}30103 / 0{,}03342$$

$$t = 9{,}0075 \text{ anos}$$

Unidade IV – Função logarítmica. Aplicações.

Exemplo: A energia nuclear, derivada de isótopos radiativos, pode ser usada em veículos espaciais para fornecer potência. Fontes de energia nuclear perdem potência gradualmente, no decorrer do tempo. Isso pode ser descrito pela função exponencial $P=P_0e^{-t/250}$, na qual P é a potência instantânea, em watts, de radioisótopos de um veículo espacial; P_0 é a potência inicial do veículo; t é o intervalo de tempo, em dias, a partir de $t_0 = 0$; e é a base do sistema de logaritmos neperianos. Nessas condições, quantos dias são necessários, aproximadamente, para que a potência de um veículo espacial se reduza à quarta parte da potência inicial? (Dado: In2=0,693).

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função logarítmica. Aplicações.

$$P = P_0 e^{-t/250}$$

$$P_0/4 = P_0 e^{-t/250}$$

$$1/4 = e^{-t/250}$$

$$\ln(1/4) = \ln e^{-t/250}$$

$$\ln 1 - \ln 4 = -t / 250$$

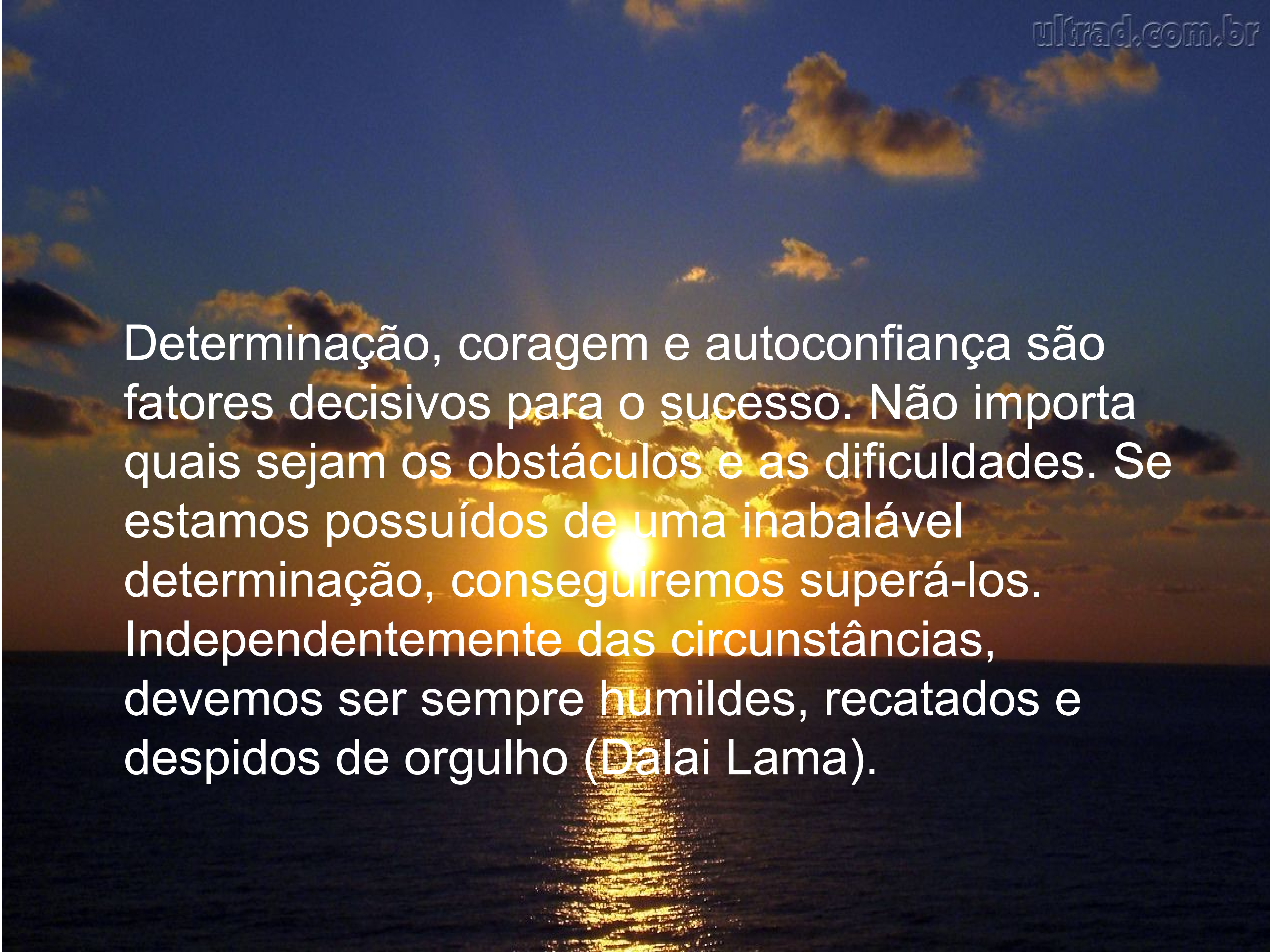
$$0 - 2 \ln 2 = -t / 250$$

$$-2 \ln 2 = -t / 250$$

$$2 \,.\, 0{,}69315 = t / 250$$

$$t = 250 \,.\, 2 \,.\, 0{,}69315$$

$$t = 346{,}5$$


ultrad.com.br
Determinação, coragem e autoconfiança são fatores decisivos para o sucesso. Não importa quais sejam os obstáculos e as dificuldades. Se estamos possuídos de uma inabalável determinação, conseguiremos superá-los. Independentemente das circunstâncias, devemos ser sempre humildes, recatados e despidos de orgulho (Dalai Lama).