Cálculo Diferencial e Integral I

Curso de
Engenharia
Civil

Período 2014.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Cálculo Diferencial e Integral I

E-mails:

damasceno12@hotmail.com
damasceno12@uol.com.br
damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info
damasceno.info

Cálculo Diferencial e Integral I

As más companhias são como um mercado de peixe; acabamos por nos acostumar ao mau cheiro. (Provérbio chinês)

Unidade IV – Função exponencial. Potenciação.

a^n é o produto de n fatores iguais a a.

$a^n = a \,.\, a \,.\, a \,.\, \ldots \,.\, a \,.\, a$

Exemplos: $2^1 = 2$

$2^2 = 2 \,.\, 2 = 4$

$2^3 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 8$

$2^4 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 16$

Unidade IV – Função exponencial. Potenciação.

Todo número elevado a 1 é igual ao próprio número.

$2^1 = 2$ $\quad$ $0{,}5^1 = 0{,}5$

$5^1 = 5$ $\quad$ $(2/3)^1 = 2/3$

Todo número, diferente de 0, elevado a 0 é igual a 1.

$2^0 = 1$ $\quad$ $0{,}5^0 = 1$

$5^0 = 1$ $\quad$ $(2/3)^0 = 1$

Multiplicação de potências de mesma base

$a^m \,.\, a^n = a^{m+n}$

$a^5 \,.\, a^3 = a^{5+3} = a^8$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função exponencial. Potenciação.

Divisão de potências de mesma base

$a^{m} / a^{n} = a^{m-n}$

$3^{5} . 3^{3} = 3^{5-3} = 3^{2}$

Porque $a^{0} = 1$

$a^{0} = a^{1-1} = a^{1} / a^{1} = 1 \quad (a \neq 0)$

Porque $a^{-n} = 1 / a^{n}$

$a^{-n} = a^{0-n} = a^{0} / a^{n} = 1 / a^{n}$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função exponencial. Potenciação.

Potência de um produto

$(a \,.\, b)^n = a^n \,.\, b^n$

$$
\begin{aligned}
(a \,.\, b)^n &= (a \,.\, b) \,.\, (a \,.\, b) \,.\, (a \,.\, b) \,\ldots\, (a \,.\, b) \\
&= a \,.\, a \,.\, a \,.\, \ldots \,.\, a \,.\, b \,.\, b \,.\, b \,.\, \ldots \,.\, b \\
&= a^n \,.\, b^n
\end{aligned}
$$

Potência de um quociente

$(a / b)^n = a^n / b^n$

$$
\begin{aligned}
(a / b)^n &= (a / b) \,.\, (a / b) \,.\, (a / b) \,\ldots\, (a / b) \\
&= (a \,.\, a \,.\, a \,.\, \ldots \,.\, a) / (b \,.\, b \,.\, b \,.\, \ldots \,.\, b) \\
&= a^n / b^n
\end{aligned}
$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função exponencial. Potenciação.

Potência de uma potência

$$(a^m)^n = a^m . a^m . a^m . \ \ldots \ . a^m$$

$$= a^{m + m + m + \ldots + m}$$

$$= a^{mn}$$

Potência de expoente fracionário

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Unidade IV – Função exponencial. Definição.

Seja $a \in R, a > 0$, e $a \neq 1$.

Chamamos de Função Exponencial a função

$f : R \to R$ definida por:

$$f(x) = a^x$$

Exemplos:

$f(x) = 3^x$; $\quad f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$;

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função exponencial. Gráfico.

1° Caso: Se $a > 1$

$y = 2^x$

$x = -2 \quad y = 0,25$

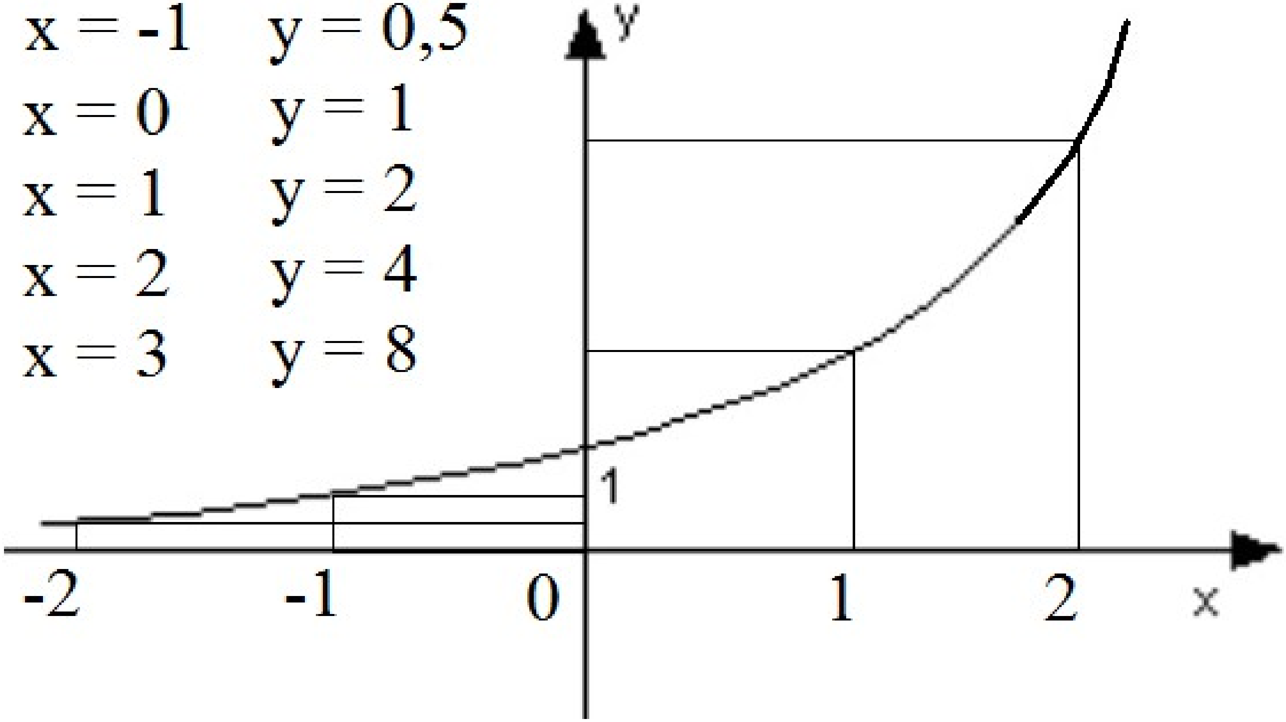
$x = -1 \quad y = 0,5$

$x = 0 \quad y = 1$

$x = 1 \quad y = 2$

$x = 2 \quad y = 4$

$x = 3 \quad y = 8$



Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função exponencial. Gráfico.

2° Caso: Se $0 < a < 1$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

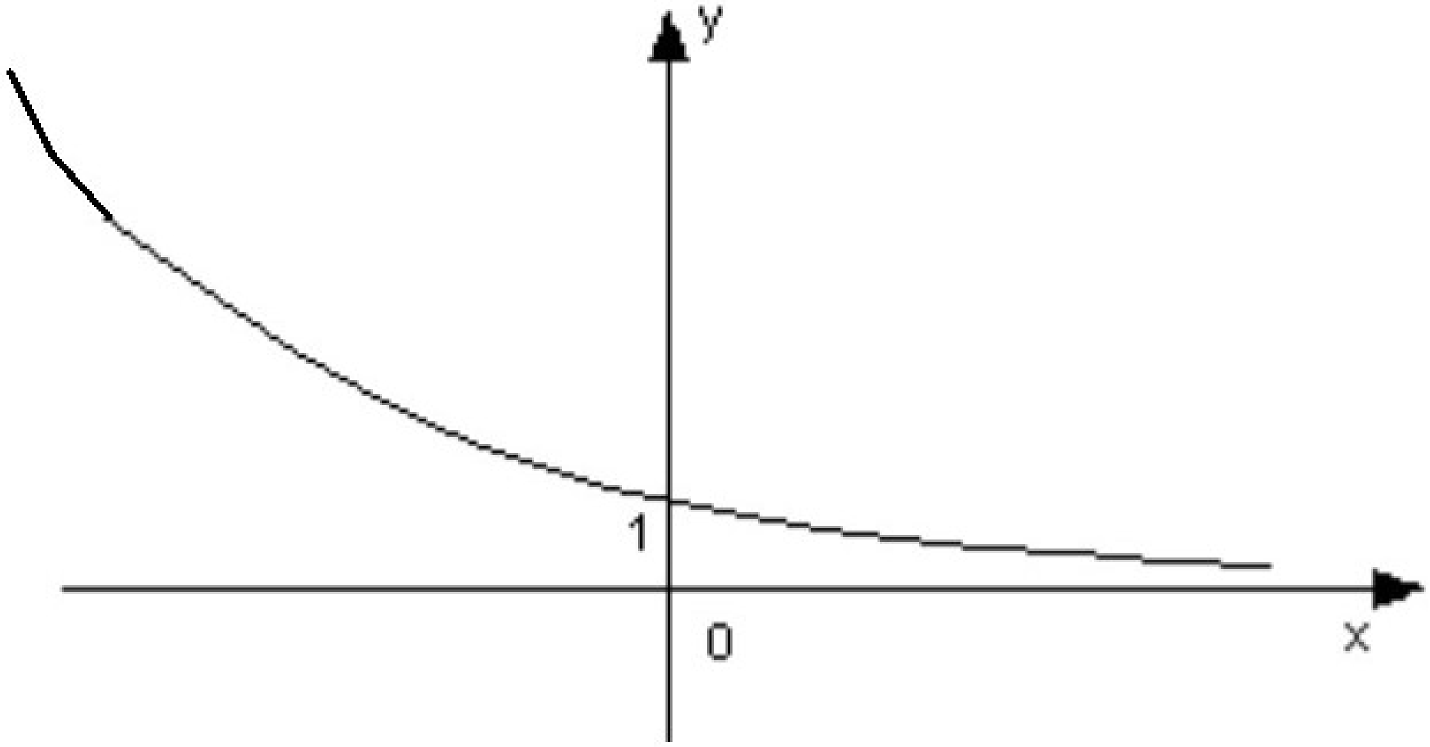
x = -3	y = 8
x = -2	y = 4
x = -1	y = 2
x = 0	y = 1
x = 1	y = 0,5
x = 2	y = 0,25
x = 3	y = 0,125

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função exponencial. Gráfico.

2° Caso: Se $0 < a < 1$

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função exponencial. Propriedades.

Domínio: $\mathrm{Dom}\,(\mathrm{f}) = R$

Imagem: $\mathrm{Im}\,(\mathrm{f}) = R_{+} = \{y \in R \mid y > 0\}$

Se $a > 1$ então f é crescente

Se $0 < a < 1$ então f é decrescente

Não existe $x \in R$, tal que $a^x = 0$

$f(0) = 1$

$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Equação exponencial.

$$2^{2x + 1} = 64$$

$$2^{2x + 1} = 2^{6}$$

$$2x + 1 = 6$$

$$2x = 5$$

$$x = 2{,}5$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Equação exponencial.

$$3^{x+2} + 3^{x+1} - 3^{x} = 33$$

$$3^{2}\,3^{x} + 3\,3^{x} - 3^{x} = 33$$

$$9.3^{x} + 3.3^{x} - 3^{x} = 33$$

$$11.3^{x} = 33$$

$$3^{x} = 3$$

$$x = 1$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Equação exponencial.

$$10^{2x-2} - 11.10^{x-1} + 10 = 0$$

$$10^{2(x-1)} - 11.10^{x-1} + 10 = 0$$

$$10^{x-1} = y$$

$$y^2 - 11y + 10 = 0$$

$$(y-1).(y-10) = 0$$

$$y = 1 \quad \text{ou} \quad y = 10$$

$$10^{x-1} = 1$$

$$10^{x-1} = 10^0$$

$$x - 1 = 0$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$10^{x-1} = 10$$

$$10^{x-1} = 10^1$$

$$x - 1 = 1$$

$$\boxed{x = 2}$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função exponencial. Aplicações

(PUC/MG - adaptada) - O número de bactérias em um meio duplica de hora em hora. Se, inicialmente, existem 8 bactérias no meio, ao fim de 10 horas o número de bactérias será:

(A) 2^{4} (B) 2^{7} (C) 2^{10} (D) 2^{13} (E) 2^{15}

Unidade IV – Função exponencial. Aplicações

No tempo t = 0, o número de bactérias é igual a 8.

No tempo t = 1, o número de bactérias é dado por

$$8.2^{1} = 16.$$

No tempo t = 2, o número de bactérias é dado por

$$8.2^{2} = 32.$$

No tempo t = x, o número de bactérias é dada por

$$N = 8.2^{x}.$$

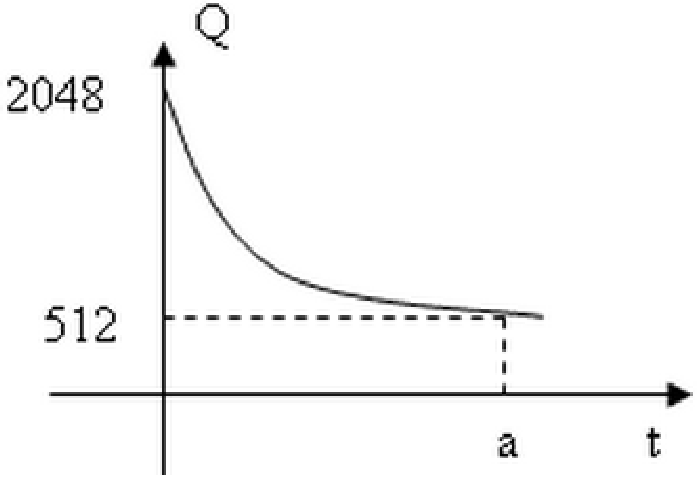
Ao fim de 10 horas, o número de bactérias será de

$$N = 8.2^{10} = 2^{3} . 2^{10} = 2^{13}$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Função exponencial. Aplicações

(Vunesp) - Uma certa substância se decompõe aproximadamente segundo a lei $Q(t) = K.2^{-0,5t}$, em que K é uma constante, t indica o tempo em minutos e Q(t) indica a quantidade da substância, em gramas, no instante t. Considerando os dados desse processo de decomposição mostrados no gráfico, determine os valores de K e de a.



Unidade IV – Equação exponencial. Aplicações

$Q(0) = 2048$

$K.2^{-0,5.0} = 2048$

$K.1 = 2048$

$K = 2048$

$Q(a) = 512$

$K.2^{-0,5.a} = 512$

$2048.2^{-0,5.a} = 512$

$2^{-0,5.a} = 512 / 2048$

$2^{-0,5.a} = 1/4$

$2^{-0,5.a} = 2^{-2}$

$-0,5a = -2$

$a = 4$

Unidade IV – Equação exponencial. Aplicações

A quantia de R$ 1200,00 foi aplicada durante 6 anos em uma instituição bancária a uma taxa de 1,5% ao mês, no sistema de juros compostos.

a) Qual será o saldo no final de 12 meses?

b) Qual será o montante final?

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Equação exponencial. Aplicações

Fórmula dos juros compostos: $M = C(1+i)^t$

C = capital M = montante final

i = taxa unitária t = tempo de aplicação

a) Após 12 meses.

$C = 1200$ $i = 1{,}5\% = 0{,}015$ (taxa unitária)

$t = 12$ meses

$$M = 1200(1+0{,}015)^{12}$$

$$M = 1200(1{,}015)^{12}$$

$$M = 1200 \,.\, 1{,}195618$$

$$M = 1.434{,}74$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade IV – Equação exponencial. Aplicações

b) Após 6 anos.

$M = ?$

$C = 1200$

$i = 1{,}5\% = 0{,}015$ (taxa unitária)

$t = 72$ meses

$$M = 1200(1+0{,}015)^{72}$$
$$M = 1200(1{,}015)^{72}$$
$$M = 1200 \,.\, 2{,}921158$$
$$M = 3.505{,}39$$

Somente o Amor tem o poder de transformar o ódio em perdão, a discórdia em união, a dúvida em fé, os erros em verdades, o desespero em esperança, a tristeza em alegria, as trevas em luz. Somente o Amor pode e poderá iluminar nossa mente, impedindo que as ilusões nos causem desenganos. (Stanganelli)