Cálculo Diferencial e Integral I

Curso de
Engenharia
Civil

Período 2014.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Cálculo Diferencial e Integral I

E-mails:

damasceno12@hotmail.com
damasceno12@uol.com.br
damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info
damasceno.info

Cálculo Diferencial e Integral I

Bem-aventurados aqueles que já podem expungir o mal de suas almas, com resignação e esperança! Para esses, os dias claros de sol logo voltarão, a alegria depressa reacenderá e a música dos sorrisos tornará muito em breve aos lábios restaurados.

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade III – Função modular. Conceito de módulo.

Módulo de um número real

$$|x| = \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplos: $|+5| = 5$

$|-4| = -(-4) = 4$

Exemplos: $|6 + 5| = |+11| = 11$

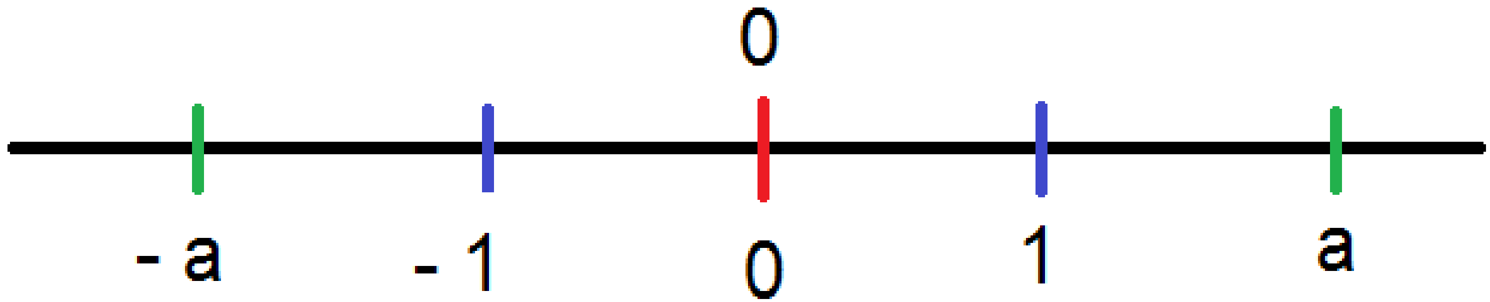
$|-3 - 5| = |-8| = -(-8) = 8$

$|-3 + 5| = |+2| = 2$

$|-3| + |5| = -(-3) + 5 = 3 + 5 = 8$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade III – Função modular. Conceito de módulo.



$|-1| = 1$ $\qquad$ $|1| = 1$

$|-a| = a$ $\qquad$ $|a| = a$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade III – Função modular. Conceito de módulo.

Exemplos:

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{se } x-4 \geq 0 \\ -(x-4) & \text{se } x-4 < 0 \end{cases}$$

$$|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{se } x \geq 4 \\ -(x-4) & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

$$|2x-10| = \begin{cases} 2x-10 & \text{se } 2x-10 \geq 0 \\ -(2x-10) & \text{se } 2x-10 < 0 \end{cases}$$

$$|2x-10| = \begin{cases} 2x-10 & \text{se } x \geq 5 \\ -(2x-10) & \text{se } x < 5 \end{cases}$$

$$2x - 10 \geq 0$$
$$2x \geq 10$$
$$x \geq 5$$

$$2x - 10 < 0$$
$$2x < 10$$
$$x < 5$$

Unidade III – Função modular. Conceito de módulo.

Exemplos:

$$|x^2 - 9| = x^2 - 9 \quad \text{se } x^2 - 9 \geq 0$$

$$x^2 \geq 9$$

$$x \leq -3 \text{ ou } x \geq 3$$

$$|x^2 - 9| = -(x^2 - 9) \quad \text{se } x^2 - 9 < 0$$

$$x^2 < 9$$

$$-3 < x < 3$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade III – Função modular. Conceito de módulo.

Exemplos:

$| x - 7 | + | x - 3 | = ?$

$| x - 7 | = x - 7$ se $x - 7 \geq 0$, isto é, $x \geq 7$

$| x - 7 | = - x + 7$ se $x - 7 < 0$, isto é, $x < 7$

$| x - 3 | = x - 3$ se $x - 3 \geq 0$, isto é, $x \geq 3$

$| x - 3 | = - x + 3$ se $x - 3 < 0$, isto é, $x < 3$

$| x - 7 | + | x - 3 | = x - 7 + x - 3 = 2x - 10$ se $x \geq 7$

$| x - 7 | + | x - 3 | = 7 - x + x - 3 = 4$ se $3 \leq x < 7$

$| x - 7 | + | x - 3 | = 7 - x + 3 - x = 10 - 2x$ se $x < 3$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade III – Função modular. Conceito de módulo.

Propriedades:

Para quaisquer valores a e b reais temos:

(1) $\sqrt{(a^2)} = | a |$

(2) $| a | \geq 0$

(3) $| a | = 0 \quad <=> \quad a = 0$

(4) $| a . b | = | a | . | b |$

(5) $| a + b | \leq | a | + | b |$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade III – Função modular. Conceito de módulo.

Propriedades:

Para quaisquer valores a e b reais temos:

(6) $|a| = |-a|$

(7) $|a - b| = 0 \iff a = b$

(8) $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$

(9) $|a / b| = |a| / |b|$ (se $b \neq 0$)

(10) $|a - b| \geq |b| - |a|$

Unidade III – Função modular. Conceito de módulo.

Propriedades:

Quando $b > 0$ temos ainda:

(11) $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$

(12) $|a| \geq b \iff a \leq -b$ ou $a \geq b$

Exemplo: $|x - 3| \leq 9 \iff -9 \leq x - 3 \leq 9$

$\iff -6 \leq x \leq 12$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade III – Função modular.

Definição: $f(x) = | x |$

$$f(x) = x \quad \text{se} \quad x \geq 0$$

$$f(x) = -x \quad \text{se} \quad x < 0$$

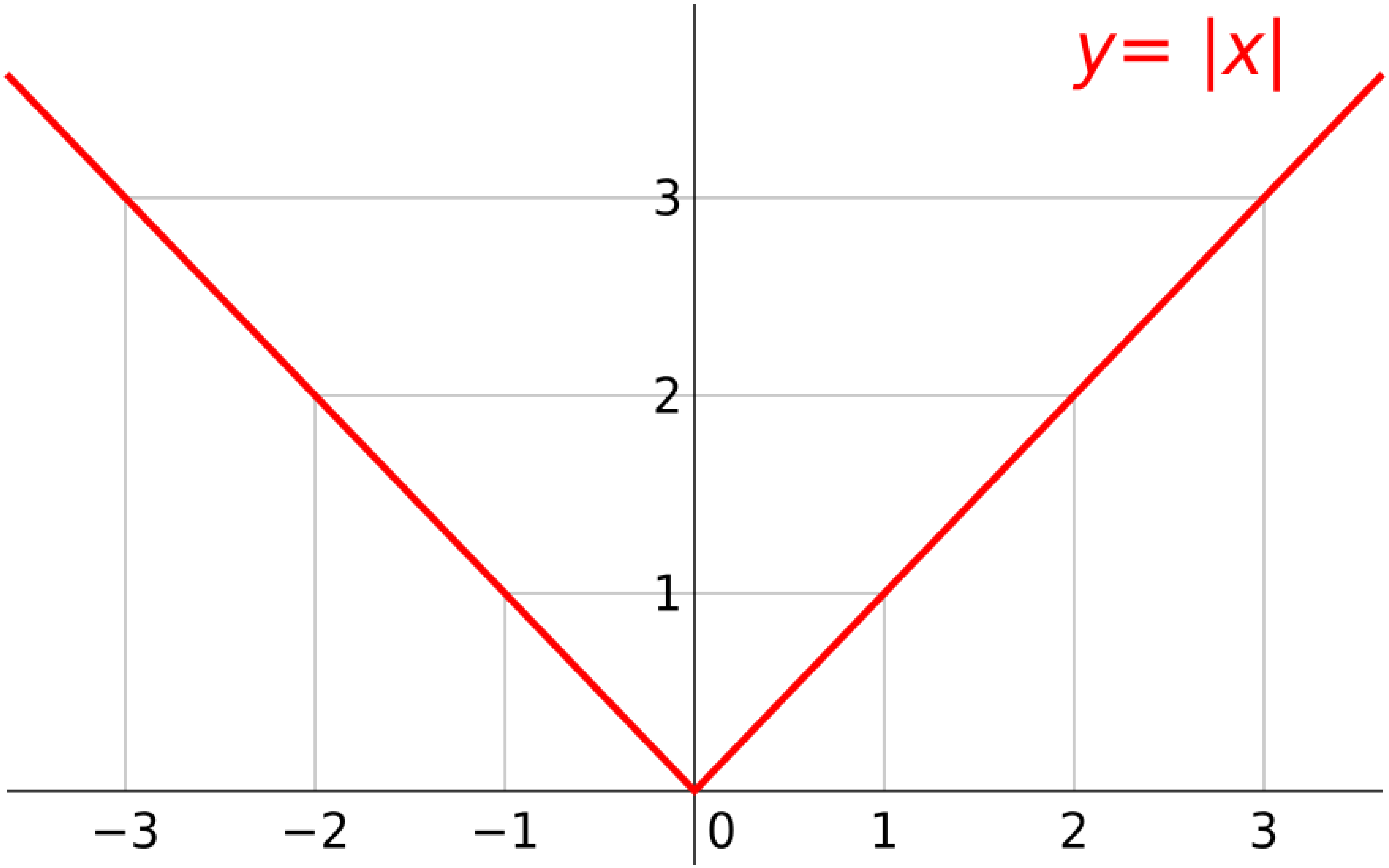
Exemplos: $f(x) = | x - 3 |$

$$f(x) = | x + 3 |$$

$$f(x) = | x^2 - 4 |$$

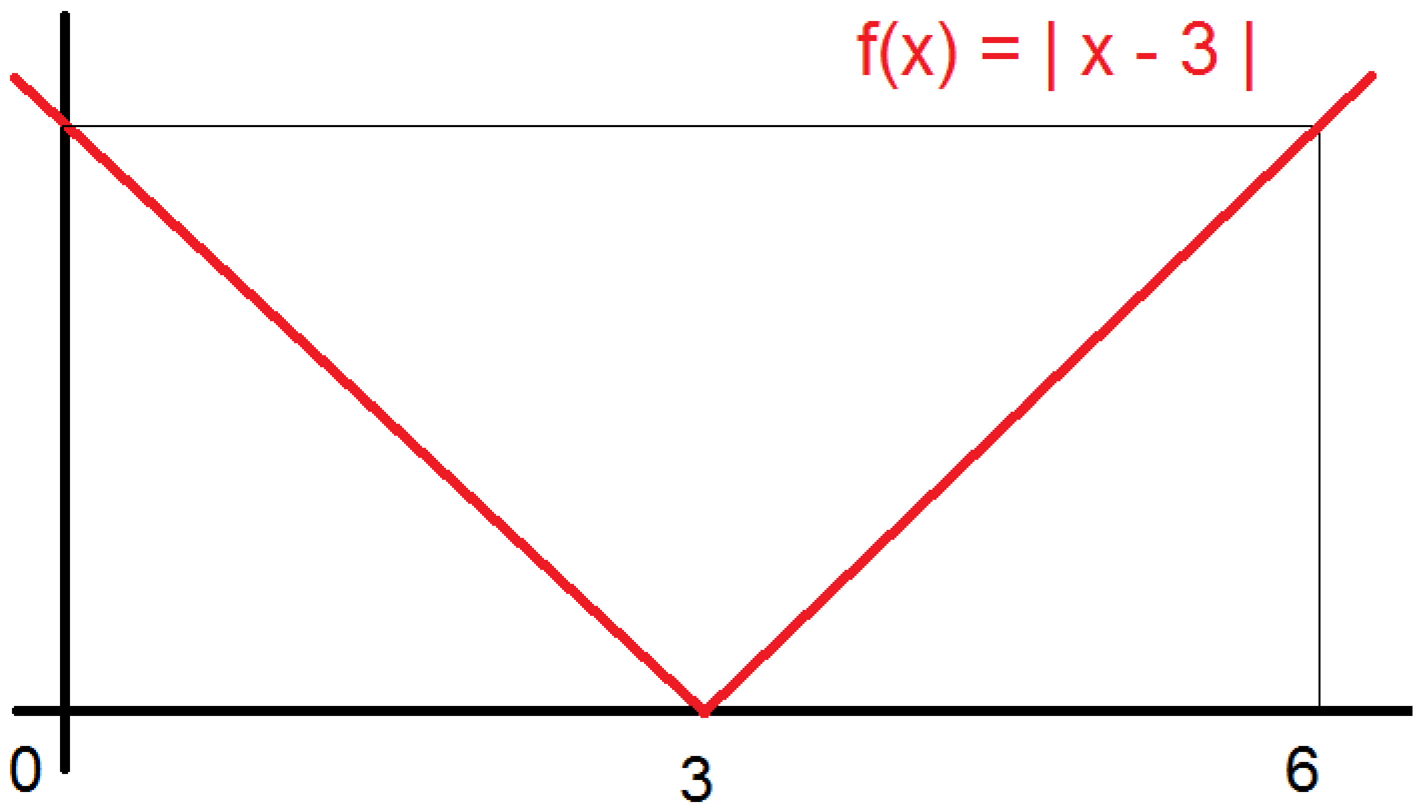
Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade III – Função modular. Gráfico.



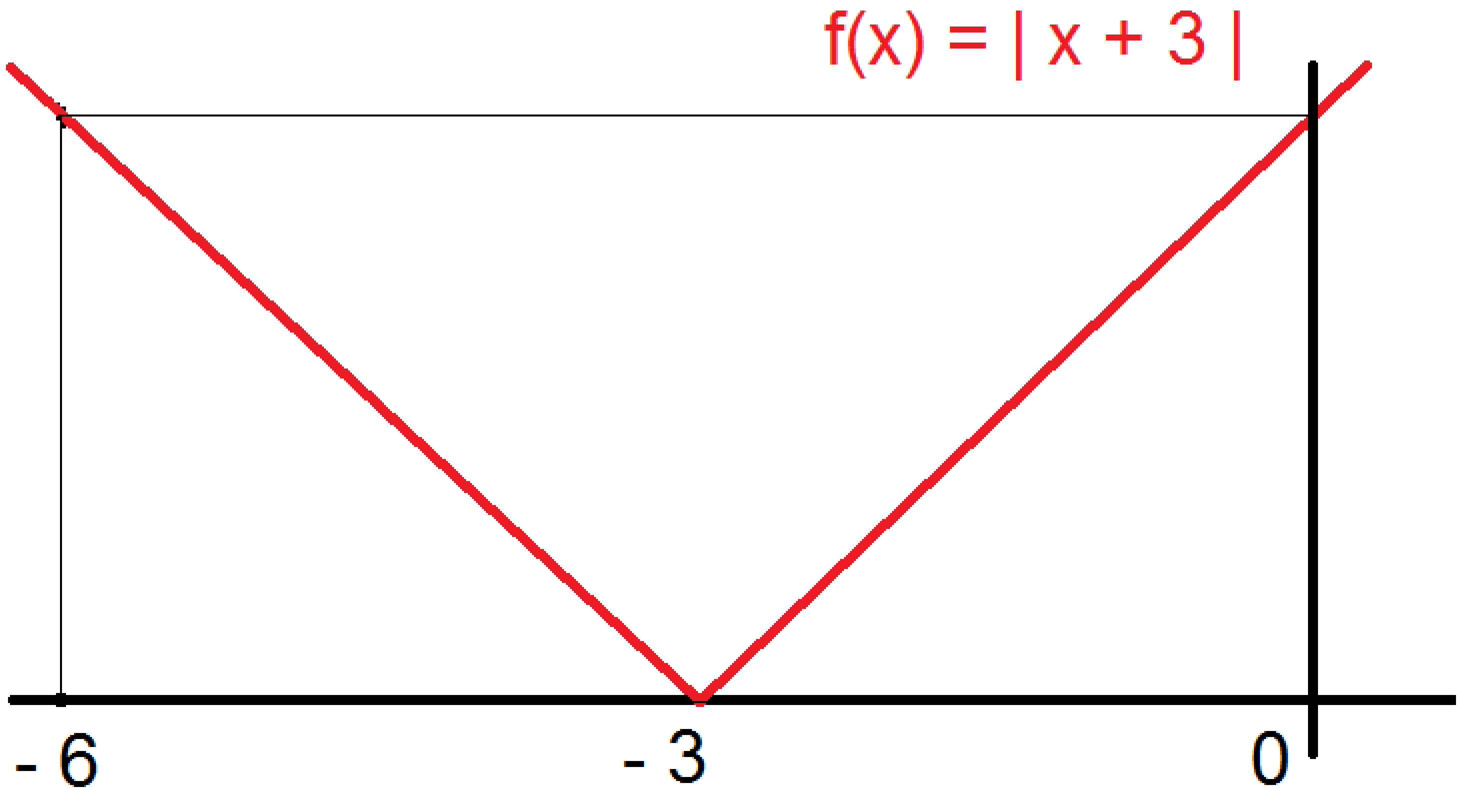
Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade III – Função modular. Gráfico.



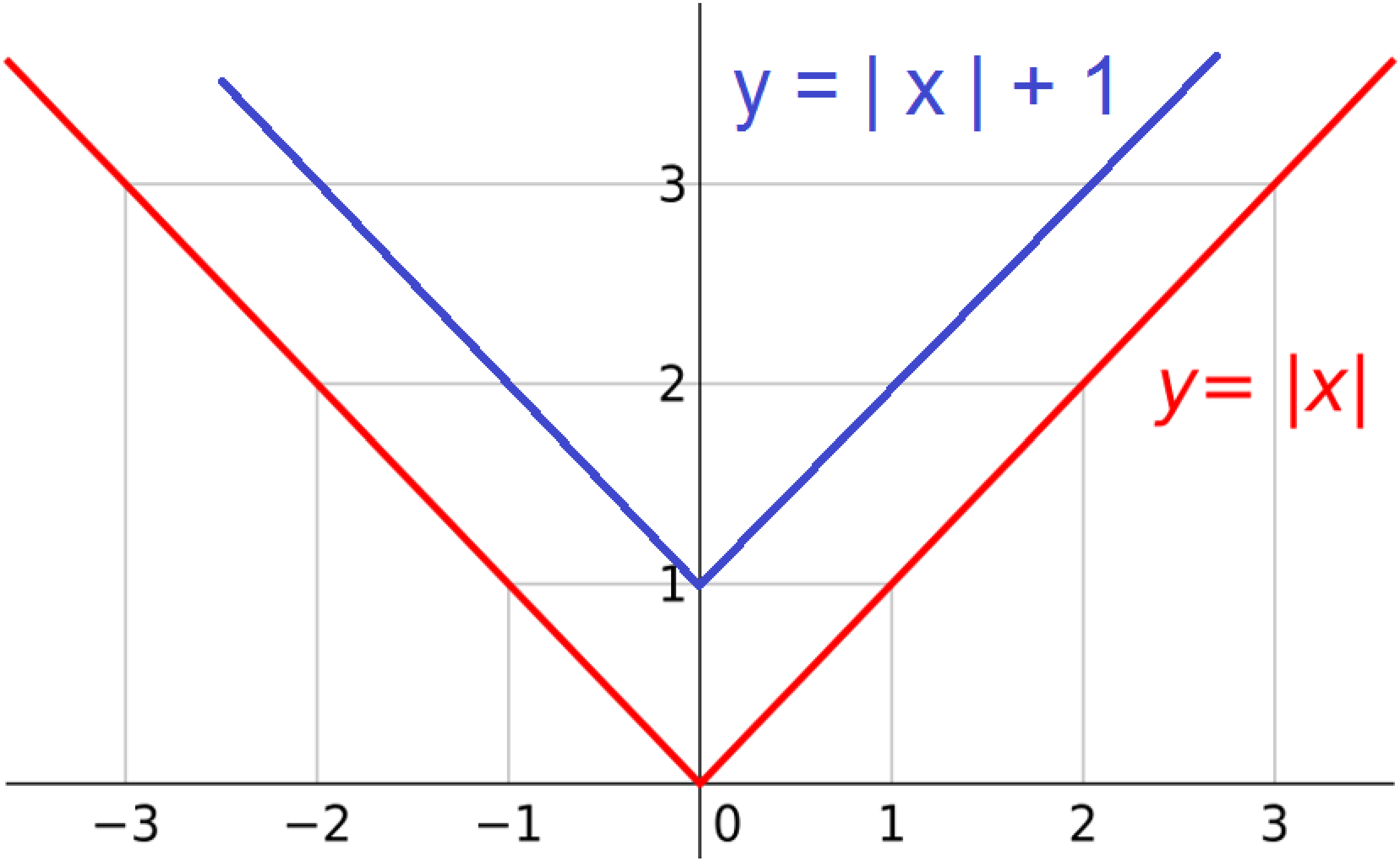
Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade III – Função modular. Gráfico.



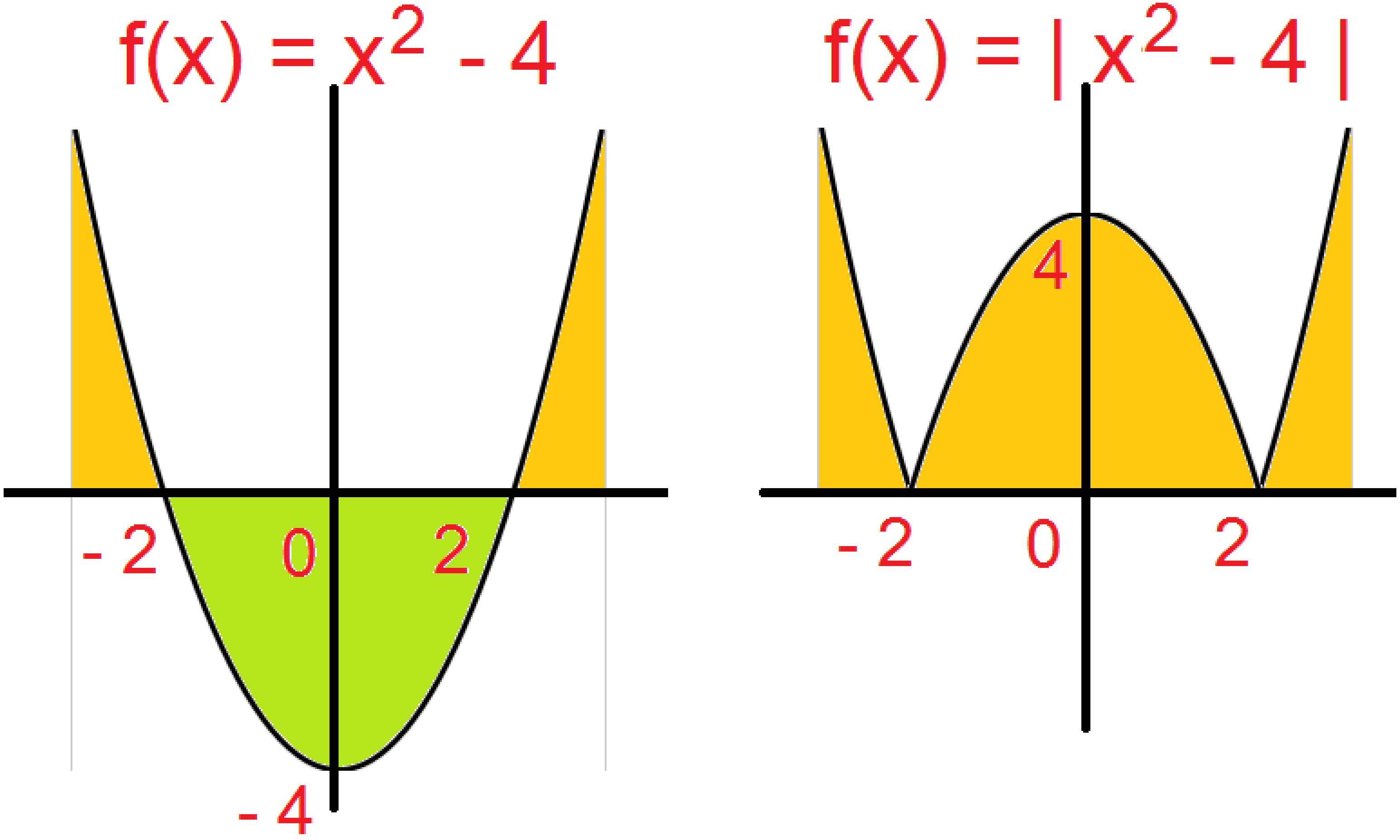
Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade III – Função modular. Gráfico.



Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade III – Função modular. Gráfico.



Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade III – Função modular. Equações modulares.

$$|2x - 7| = 3$$

$$|2x - 7| = 2x - 7 \quad \text{se} \quad 2x - 7 \geq 0$$

$$\text{se} \quad 2x \geq 7$$

$$\text{se} \quad x \geq 3{,}5$$

$$2x - 7 = 3$$

$$2x = 10$$

$$x = 5 \quad \text{(válida pois } 5 > 3{,}5\text{)}$$

Unidade III – Função modular. Equações modulares.

$$| 2x - 7 | = 3$$

$$| 2x - 7 | = -2x + 7 \quad \text{se} \quad 2x - 7 < 0$$
$$\text{se} \quad 2x < 7$$
$$\text{se} \quad x < 3,5$$

$$-2x + 7 = 3$$
$$-2x = -4$$
$$x = 2 \quad \text{(válida pois } 2 < 3,5\text{)}$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade III – Função modular. Equações modulares.

$$|x-4|^2 - 2|x-4| - 8 = 0$$

$$|x-4| = x-4 \quad \text{se} \quad x-4 \geq 0$$

$$\text{se} \quad x \geq 4$$

$$(x-4)^2 - 2(x-4) - 8 = 0$$

$$x^2 - 8x + 16 - 2x + 8 - 8 = 0$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 8$$

$$\boxed{x = 8 \text{ (pois } 8 > 4)}$$

Unidade III – Função modular. Equações modulares.

$$| x - 4 |^2 - 2| x - 4 | - 8 = 0$$

$$| x - 4 | = - x + 4 \quad \text{se} \quad x - 4 < 0$$

$$\text{se} \quad x < 4$$

$$(4 - x)^2 - 2(4 - x) - 8 = 0$$

$$16 - 8x + x^2 - 8 + 2x - 8 = 0$$

$$x^2 - 6x = 0$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 6$$

$$\boxed{x = 0 \text{ (pois } 0 < 4)}$$

Unidade III – Função modular. Equações modulares.

$$|x^2 - 5x| = 3x - 7$$

$$|x^2 - 5x| = x^2 - 5x \quad \text{se} \quad x^2 - 5x \geq 0$$

$$\text{se} \quad x(x - 5) \geq 0$$

$$\text{se} \quad x \leq 0 \text{ ou } x \geq 5$$

$$x^2 - 5x = 3x - 7$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 7$$

$$\boxed{x = 7 \text{ (pois } 7 \geq 5)}$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade III – Função modular. Equações modulares.

$$| x^2 - 5x | = 3x - 7$$

$| x^2 - 5x | = - x^2 + 5x$ se $x^2 - 5x < 0$

se $x(x - 5) < 0$

se $0 < x < 5$

$$- x^2 + 5x = 3x - 7$$

$$x^2 - 2x - 7 = 0$$

$$\Delta = (- 2)^2 - 4. 1. (- 7) = 4 + 28 = 32$$

$$x = (2 + 5{,}65) / 2 = 3{,}83$$

$$x = (2 - 5{,}65) / 2 = - 1{,}83$$

$$\boxed{x = 3{,}83 \text{ (pois } 0 < 3{,}83 < 5)}$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade III – Função modular. Inequações modulares.

1) $| x - 4 | < 5$

$x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$

Primeira hipótese: $x < 4$

$-x + 4 < 5$

$-x < 1$

$x > -1$

$\boxed{-1 < x < 4}$

Segunda hipótese: $x \geq 4$

$x - 4 < 5$

$x < 9$

$\boxed{4 \leq x < 9}$

$\boxed{-1 < x < 9}$

Unidade III – Função modular. Inequações modulares.

2) $| 2x - 6 | > 4$

$2x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

Primeira hipótese: $x < 3$

$-2x + 6 > 4$

$2x - 6 < -4$

$2x < 2$

$x < 1$

$\boxed{x < 1}$

Segunda hipótese: $x \geq 3$

$2x - 6 > 4$

$2x > 10$

$x > 5$

$\boxed{x > 5}$

$\boxed{x < 1 \quad \text{ou} \quad x > 5}$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade III – Função modular. Inequações modulares.

3) $4 < |2x - 6| < 8$

$2x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

Primeira hipótese: $x < 3$

$-2x + 6 > 4 \quad$ e $\quad -2x + 6 < 8$

$2x - 6 < -4 \quad$ e $\quad 2x - 6 > 8$

$2x < 2 \quad$ e $\quad 2x > 14$

$x < 1 \quad$ e $\quad x > 7$

$\boxed{x < 1}$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade III – Função modular. Inequações modulares.

Segunda hipótese: $x \geq 3$

$2x - 6 > 4$ e $2x - 6 < 8$

$2x > 10$ e $2x < 14$

$x > 5$ e $x < 7$

$x > 5$

$\boxed{5 < x < 7}$

$\boxed{x < 1 \quad \text{ou} \quad 5 < x < 7}$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade III – Função modular. Inequações modulares.

4) $|2x + 8| + |x - 5| \geq 15$

$2x + 8 = 0 \Rightarrow 2x = -8 \Rightarrow x = -4$

$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

Primeira hipótese: $x < -4$

$-2x - 8 - x + 5 \geq 15$

$-3x \geq 18$

$x \leq -6$

$\boxed{x \leq -6}$

Segunda hipótese: $-4 \leq x < 5$

$2x + 8 - x + 5 \geq 15$

$x \geq 2$

$\boxed{2 \leq x < 5}$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade III – Função modular. Inequações modulares.

Terceira hipótese: $x \geq 5$

$2x + 8 + x - 5 \geq 15$

$3x \geq 12$

$x \geq 4$

$\boxed{x \geq 5}$

Sol.: $x \leq -6$ ou $2 \leq x < 5$ ou $x \geq 5$

$\boxed{\text{Sol.: } x \leq -6 \text{ ou } x \geq 2}$

O medo é algoz impenitente que destrói, seguro de si, estilhaçando tudo, tudo transformando em maior razão de pavor: pequenos ruídos semelham trovões, o cicio do vento parece voz de fantasma, a própria respiração soa como estertor de gigante, prestes a desferir golpe fatal. (Victor Hugo)