Cálculo Diferencial e Integral I

Curso de
Engenharia
Civil

Período 2014.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Cálculo Diferencial e Integral I

E-mails:

damasceno12@hotmail.com

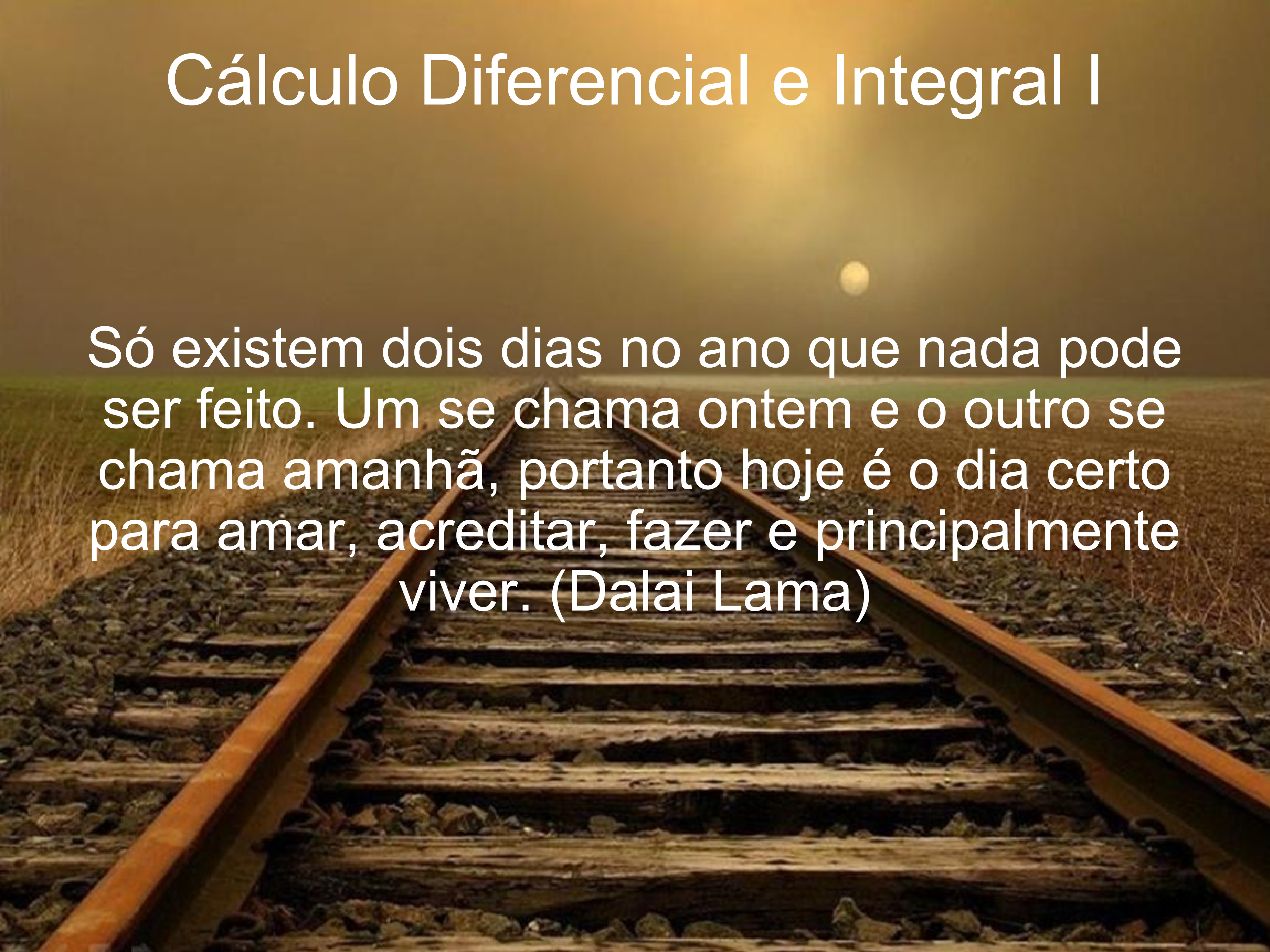
damasceno12@uol.com.br

damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info

damasceno.info



Cálculo Diferencial e Integral I

Só existem dois dias no ano que nada pode ser feito. Um se chama ontem e o outro se chama amanhã, portanto hoje é o dia certo para amar, acreditar, fazer e principalmente viver. (Dalai Lama)

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Inequação do segundo grau.

Uma Inequação do 2º Grau é uma inequação que pode ser reduzida à forma

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \text{ou}$$

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad \text{ou}$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \text{ou}$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Inequação do segundo grau.

Exemplo: $x^2 + 6 \geq 5x$

$x^2 - 5x + 6 \geq 0$

$a = 1 > 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4.1.6$

$\Delta = 25 - 24$

$\Delta = 1 > 0$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$x = 2$ ou $x = 3$

$a = 1 > 0$

$\Delta = 1 > 0$

$x^2 - 5x + 6 > 0$

$x < 2$ ou $x > 3$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x = 2$ ou $x = 3$

$\boxed{x \leq 2 \text{ ou } x \geq 3}$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Inequação do segundo grau.

Exemplo:

$$x^2 - 2x + 1 \leq 0$$

$$a = 1 > 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\Delta = 4 - 4$$
$$\Delta = 0$$

Como $\Delta = 0$, os zeros de $f(x) = x^2 - 2x + 1$ são apenas $x = 1$.

Como $a = 1 > 0$, $f(x) > 0$ para todo $x \neq 1$

Portanto, os valores que fazem $f(x) < 0$ ou $f(x) = 0$, são apenas $x = 1$.

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Inequação do segundo grau.

Exemplo: $-x^2 - x - 1 > 0$

$$a = -1$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4.(-1).(-1)$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

Como $\Delta < 0$ e $a = -1 < 0$
não há valores que fazem
$f(x) > 0$

Unidade II – Inequação produto do segundo grau.

Exemplo: $(x - 3)(x^2 - 4) > 0$

$$(x - 3)(x - 2)(x + 2) > 0$$

		-2	2	3
$x + 2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	$+$
Produto	$-$	$+$	$-$	$+$

Solução: $-2 < x < 2$ ou $x > 3$

Unidade II – Inequação produto do segundo grau.

Exemplo: $(x^2 - 2x - 3)(-x^2 - 3x + 4) > 0$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = 3$$
$$-x^2 - 3x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \text{ ou } x = 1$$

$-4 \quad -1 \quad 1 \quad 3$

$x^2 - 2x - 3$	+	+	–	–	+
$-x^2 - 3x + 4$	–	+	+	–	–
Produto	–	+	–	+	–

Solução: $-4 < x < -1$ ou $1 < x < 3$

Unidade II – Inequação quociente do segundo grau.

Exemplo: $$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 5x + 4} \geq 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \;\; => \;\; x = -3 \text{ ou } x = 1$$
$$x^2 + 5x + 4 = 0 \;\; => \;\; x = -4 \text{ ou } x = -1$$

$-4 \qquad -3 \qquad -1 \qquad 1$

$x^2 + 2x - 3$	+	+	−	−	+
$x^2 + 5x + 4$	+	−	−	+	+
Produto	+	−	+	−	+

Solução: $x < -4$ ou $-3 \leq x < -1$ ou $x \geq 1$

Unidade II – Funções polinomiais do segundo grau. Aplicações.

Exemplo: (FAAP – SP) Uma indústria produz, por dia, x unidades de determinado produto, e pode vender tudo o que produzir a um preço de R$ 100,00 a unidade. Se x unidades são produzidas a cada dia, o custo total, em reais, da produção diária é igual a $x^2 + 20x + 700$. Portanto, para que a indústria tenha lucro diário de R$ 900,00, qual deve ser o número de unidades produzidas e vendidas por dia?

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Funções polinomiais do segundo grau. Aplicações.

Função Receita

$R(x) = 100 * x$

Função Custo

$C(x) = x^2 + 20x + 700$

Função Lucro = Receita – Custo

$L(x) = 100x - (x^2 + 20x + 700)$

$L(x) = 100x - x^2 - 20x - 700$

$L(x) = -x^2 + 80x - 700$

Lucro diário de R$ 900,00

$-x^2 + 80x - 700 = 900$

$-x^2 + 80x - 700 - 900 = 0$

$-x^2 + 80x - 1600 = 0$

$x = 40$ unidades

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Funções polinomiais do segundo grau. Aplicações.

(PUC – SP) Uma bola é largada do alto de um edifício e cai em direção ao solo. Sua altura h em relação ao solo, t segundos após o lançamento, é dada pela expressão $h = -25t^2 + 625$. Após quantos segundos do lançamento a bola atingirá o solo?

Unidade II – Funções polinomiais do segundo grau. Aplicações.

Quando a bola atingir o solo, sua posição será igual a zero, então:

$$h = 0$$
$$0 = -25t^2 + 625$$
$$25t^2 = 625$$
$$t^2 = 625 / 25$$
$$t^2 = 25$$
$$t = 5$$

A bola levará 5 segundos para atingir o solo.

Unidade II – Funções polinomiais do segundo grau. Aplicações.

(Furg-RS) Um jogador de futebol se encontra a uma distância de 20 m da trave do gol adversário, quando chuta uma bola que vai bater exatamente sobre essa trave, de altura 2 m. Se a equação da trajetória da bola em relação ao sistema de coordenadas indicado na figura é $y = ax^2 + (1 - 2a)x$, a altura máxima atingida pela bola é:

(A) 6,00 m

(B) 6,01 m

(C) 6,05 m

(D) 6,10 m

(E) 6,50 m

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Funções polinomiais do segundo grau. Aplicações.

Note que o ponto onde a bola acertou a trave tem coordenadas (20, 2). Como esse ponto faz parte da equação $y = ax^2 + (1 - 2a)x$, podemos substitui-lo para encontrar o valor de "a".

$y = ax^2 + (1 - 2a).x$

$2 = a.(20)^2 + (1 - 2a).20$

$2 = 400.a + 20 - 40a$

$2 - 20 = 360a$

$360a = -18$

$a = -18/360$

$a = -1/20$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Funções polinomiais do segundo grau. Aplicações.

Então;

$y = (-\ 1/20).x^2 + [\ 1 - 2.(-\ 1/20)].x$

$y = (-\ x^2/20) + x + (2x/20)$

$y = (-\ x^2/20) + x + (2x/20)$

$y = (-\ x^2/20) + (20x + 2x)/20$

$y = (-\ x^2/20) + (22x/20)$

$y = (-\ x^2/20) + (11x/10)$

$Xv = -\ b/2a = -\ (11/10)/(2.(-1/20))$

$Xv = -\ (11/10)/(-\ 2/20) = -\ (11/10)/(-\ 1/10) = 11$

$Yv = -\ (11^2/20) + (11.11/10)$

$Yv = -\ (121/20) + (121/10)$

$Yv = -\ (121/20) + (242/20)$

$Yv = 121/20 = 6,05$

Usa da tua fé quando as cores do teu arco-íris parecerem desmoronar do teu céu.
Usa da tua alegria, da tua consciência divina, quando a tristeza invadir teu coração e dele fizer a sua morada.
Usa da tua intuição quando não souberes a direção a ser tomada.
Não te abandones em lugares onde a luz da tua harmonia não esteja presente.
Para aqueles que prosseguem, mesmo sem poder contar com qualquer tipo de ajuda, é dado o discernimento para escolher, é dado um coração aberto para aceitar e aprender, é dado luz para que nada obscureça frente à visão interior e uma grande proteção Daquele que te assegura ser necessário coragem e confiança para desintegrar ilusões que impedem de viver, viver plenamente (Dalai Lama).

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Função do segundo grau. Máximos e mínimos

$$y = ax^2 + bx + c$$

Quando o coeficiente a é positivo, a parábola tem a concavidade voltada para cima. Existe, portanto, um valor mínimo dessa função.

O ponto mais baixo do gráfico é o vértice.

Quando o coeficiente a é negativo, a parábola tem a concavidade voltada para baixo. Existe, portanto, um valor máximo dessa função.

O ponto mais alto do gráfico é o vértice.

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Máximos e mínimos

Problema: Os técnicos de uma fábrica de automóveis fizeram diversos testes com um de seus carros populares para examinar o consumo de gasolina. O carro percorria 100 km em uma estrada plana, com velocidade constante. O percurso foi feito muitas vezes e, a cada vez, usou-se uma velocidade diferente. No final de cada viagem, os técnicos verificaram a quantidade de combustível gasta e observaram que o consumo não se mantinha o mesmo, pois era função da velocidade. A conclusão foi a seguinte: para velocidade entre 40 e 120 km/h, o consumo desse carro é dado por:

$$y = 0{,}005x^2 - 0{,}6x + 26$$

onde x é a velocidade em km/h e y é o número de litros de gasolina gastos para percorrer 100 km.

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Máximos e mínimos

Em que velocidade devemos andar com esse carro, para gastar o mínimo de combústivel?

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0,6}{2 \times 0,005} = \frac{0,6}{0,01} = 60$$

$$y_v = 0,005 \times 60^2 - 0,6 \times 60 + 26$$

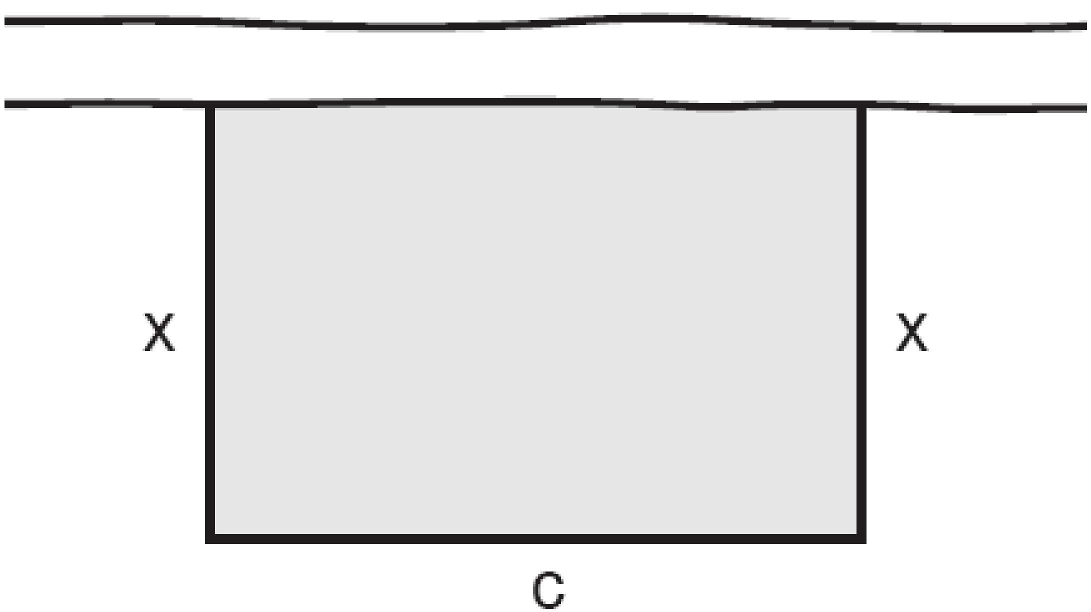
$$y_v = 0,005 \times 3600 - 36 + 26$$

$$y_v = 18 - 36 + 26 = 8$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Máximos e mínimos

Com 80 m de corda, um fazendeiro deseja cercar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais. Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível?



Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Máximos e mínimos

$2x + c = 80$

$c = 80 - 2x$

$A(x) = cx$

$A(x) = (80 - 2x)x$

$A(x) = 80x - 2x^2$

$A(x) = -2x^2 + 80x$

$a = -1 < 0$

concavidade voltada para baixo (máximo)

$x_v = -b/2a$

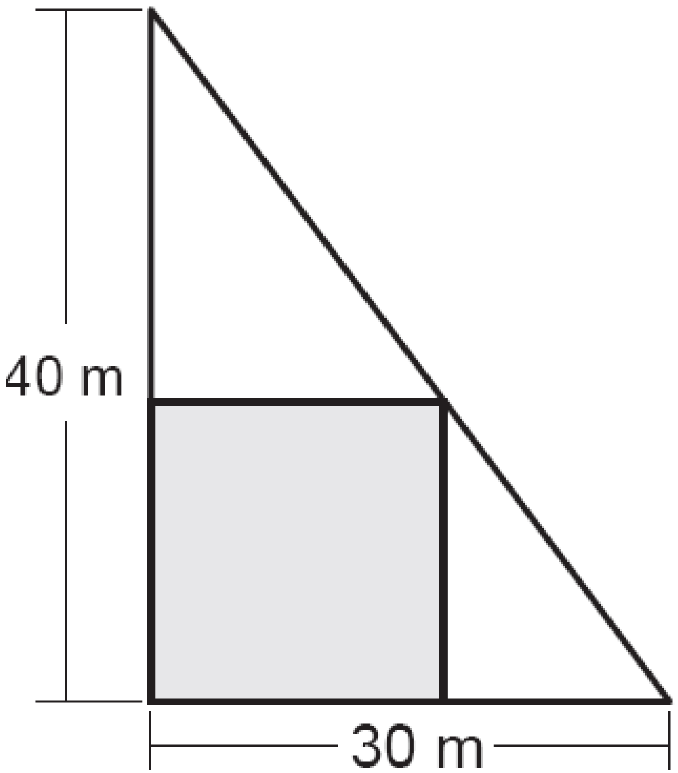
$x_v = -80/-4 = 20$

$c = 80 - 2.20 = 40$

Cálculo Diferencial e Integral I

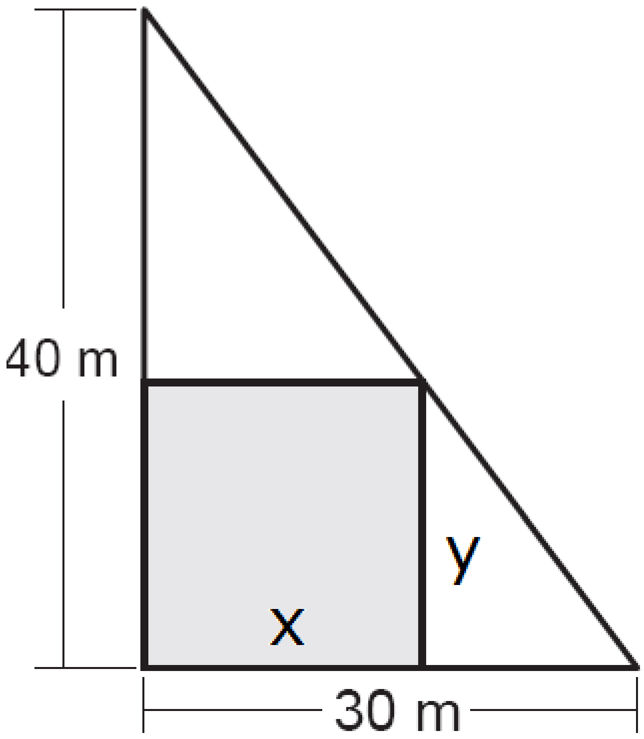
Unidade II – Máximos e mínimos

Desejamos construir um edifício de base retangular no interior de um terreno triangular, como mostra a figura: Determine as medidas do retângulo de maior área possível que caiba dentro de um triângulo retângulo de catetos 30 m e 40 m.



Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Máximos e mínimos



$$\frac{30 - x}{y} = \frac{30}{40}$$

$$30y = 1200 - 40x$$

$$y = \frac{(1200 - 40x)}{30}$$

$$A = xy$$

$$A(x) = \frac{(1200 - 40x)x}{30}$$

$$A(x) = \frac{(120 - 4x)x}{3}$$

Unidade II – Máximos e mínimos

$$A(x) = 40x - (4/3)x^2$$
$$x_v = -b/2a$$
$$x_v = 40/(8/3) = 120/8$$
$$x_v = 15$$
$$30y = 1200 - 40.15$$
$$30y = 1200 - 600$$
$$30y = 600$$
$$y = 20$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Máximos e mínimos

João tem uma pequena fábrica de sorvetes. Ele vende, em média, 300 caixas de picolés por R$ 20,00 cada uma. Entretanto percebeu que, cada vez que diminuía R$ 1,00 no preço da caixa, vendia 40 caixas a mais. Quanto ele deveria cobrar pela caixa para que sua receita fosse máxima? Qual o valor máximo dessa receita?

Preço	Caixas vendidas	Receita
20	300	6000,00
19	340	6460,00
18	380	
17	420	

Cálculo Diferencial e Integral I

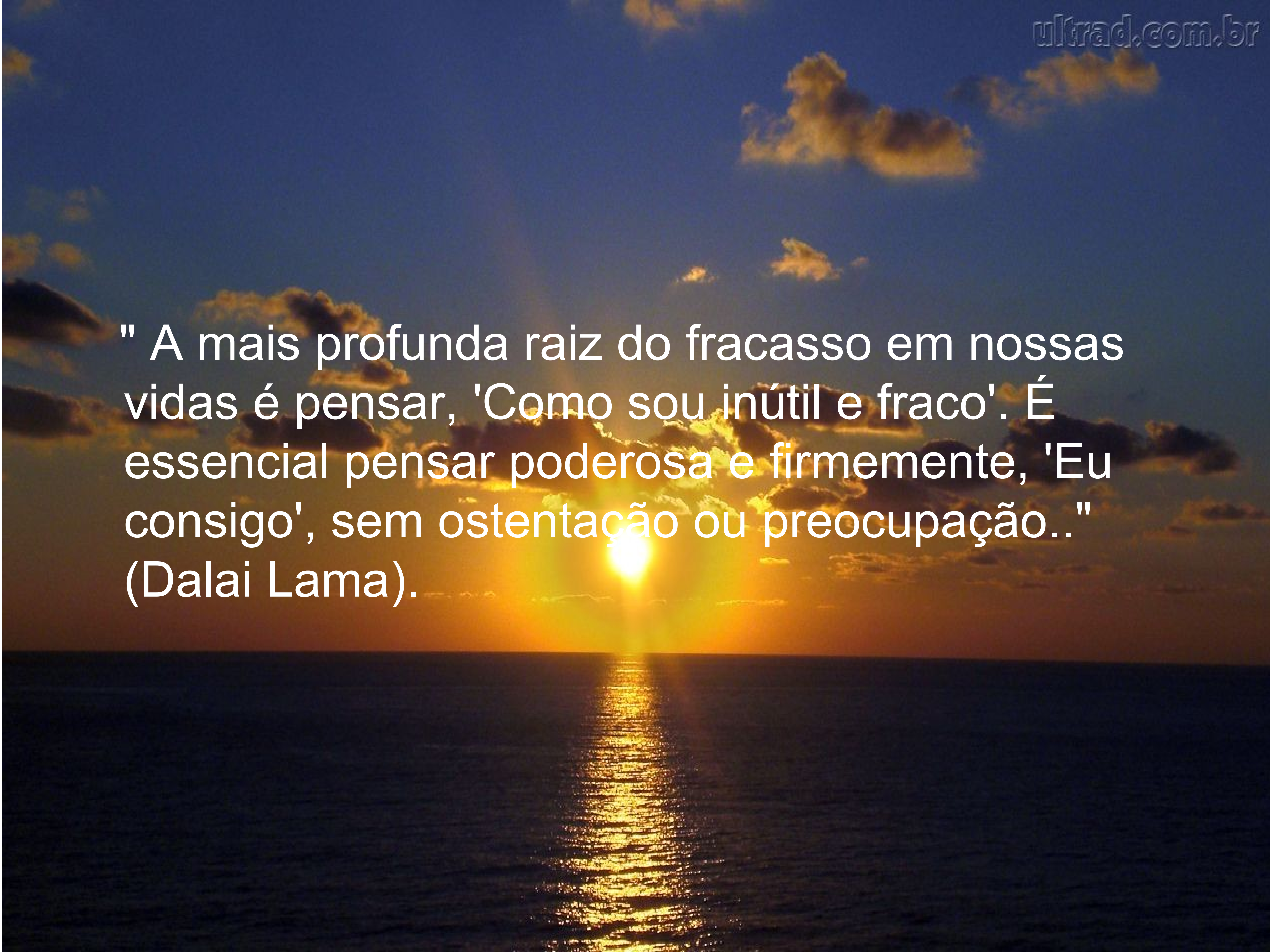
Unidade II – Máximos e mínimos

$R(x) = (300 + 40x)(20 - x)$
$R(x) = 6000 + 800x - 300x - 40x^2$
$R(x) = -40x^2 + 500x + 6000$

$a = -1 < 0$
concavidade voltada
para baixo (máximo)

$x_v = -b/2a$
$x_v = -500/-40 = 12{,}5$

$R = -40.12{,}5^2 + 500.12{,}5 + 6000$
$R = -6250 + 6250 + 6000$
$R = 6000$


ultrad.com.br
" A mais profunda raiz do fracasso em nossas vidas é pensar, 'Como sou inútil e fraco'. É essencial pensar poderosa e firmemente, 'Eu consigo', sem ostentação ou preocupação.."
(Dalai Lama).