Cálculo Diferencial e Integral I

Curso de
Engenharia
Civil

Período 2014.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Cálculo Diferencial e Integral I

E-mails:

damasceno12@hotmail.com
damasceno12@uol.com.br
damasceno1204@yahoo.com.br

Site:

www.damasceno.info
damasceno.info

Cálculo Diferencial e Integral I

O que queres que não podes ter?

Nesta frase tão curta, reside todo o emaranhado de fios que te sufocam a cada dia.

Começa por ti e em ti.

Aprende a conhecer tuas reais necessidades e começa por elas. (Dalai Lama)

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II - Funções do segundo grau

Chama-se função quadrática, qualquer função f de R em R, definida pela lei de formação

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c,$$

onde a, b, c são números reais com $a \neq 0$.

Aplicações:

Movimento uniformemente variado (Física);

lançamento oblíquo (Física);

processo de fotossíntese das plantas (Biologia);

as funções de custo, receita e lucro (Adm e Cont);

nas diversas construções (Eng. Civil).

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II - Funções do segundo grau

Exemplos:

1) $f(x) = 3x^2 – 4x + 1$; $a = 3$, $b = – 4$, $c = 1$

2) $f(x) = x^2 – 4x$; $a = 1$, $b = – 4$, $c = 0$

3) $f(x) = x^2 – 1$; $a = 1$, $b = 0$, $c = – 1$

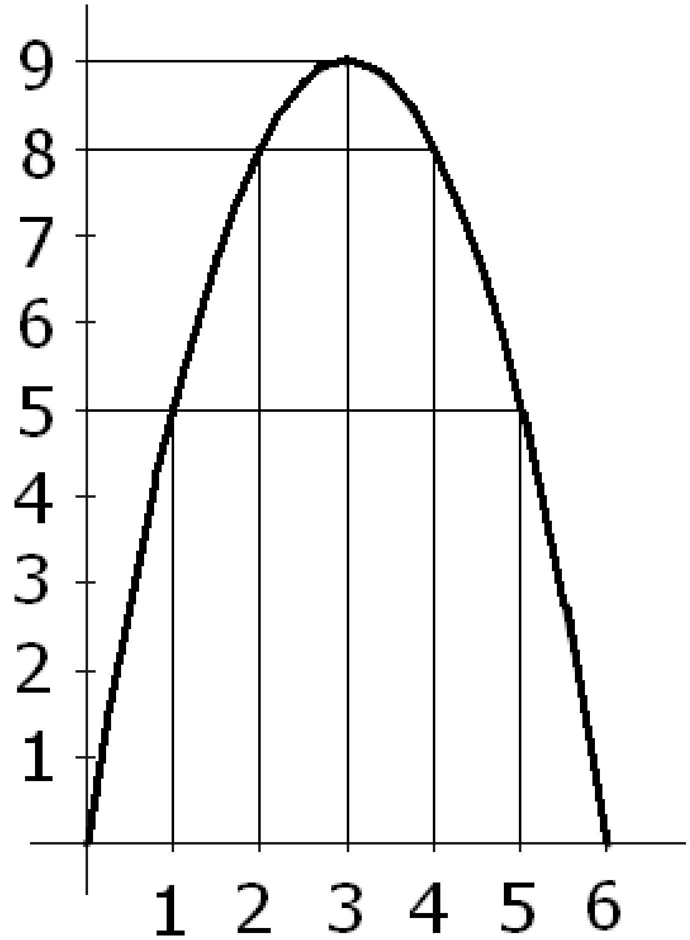
4) $f(x) = x^2 + 4x + 4$; $a = 1$, $b = 4$, $c = 4$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II - Funções do segundo grau. Gráfico

$$y = -x^2 + 6x$$

x	y
0	0
1	5
2	8
3	9
4	8
5	5
6	0

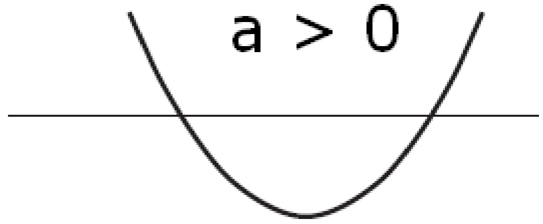


Cálculo Diferencial e Integral I

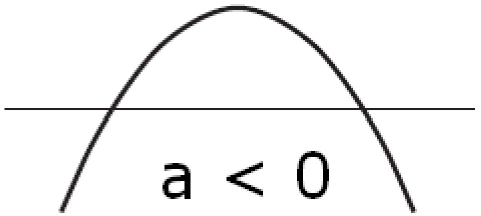
Unidade II - Funções do segundo grau. Concavidade

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

Se a > 0, a concavidade estará voltada para cima:



Se a < 0, a concavidade estará voltada para baixo:



Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Zeros de uma função do segundo grau.

Os zeros de uma função são os valores de x para os quais a função se anula ($f(x) = 0$).

Exemplo: $y = x^2 – 4$

$x^2 – 4 = 0$

$(x – 2)(x + 2) = 0$

$x – 2 = 0$ ou $x + 2 = 0$

$x = 2$ ou $x = – 2$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Zeros de uma função do segundo grau.

Os zeros de uma função são os valores de x para os quais a função se anula ($f(x) = 0$).

Exemplo: $y = x^2 + 6x$

$x^2 + 6x = 0$

$x\,(x + 6) = 0$

$x = 0$ ou $x + 6 = 0$

$x = 0$ ou $x = -6$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Zeros de uma função do segundo grau.

Os zeros de uma função são os valores de x para os quais a função se anula ($f(x) = 0$).

Exemplo: $y = x^2 - 6x + 9$

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$(x - 3)(x - 3) = 0$

$x - 3 = 0$ ou $x - 3 = 0$

$x = 3$ ou $x = 3$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Zeros de uma função do segundo grau.

Os zeros de uma função são os valores de x para os quais a função se anula ($f(x) = 0$).

Exemplo: $y = x^2 - 6x + 8$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$(x - 2)(x - 4) = 0$

$x - 2 = 0$ ou $x - 4 = 0$

$x = 2$ ou $x = 4$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Zeros de uma função do segundo grau.

Os zeros de uma função são os valores de x para os quais a função se anula (f(x) = 0).

Ex.: $y = x^2 - 5x + 6$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6$$

$$\Delta = 25 - 24$$

$$\Delta = 1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

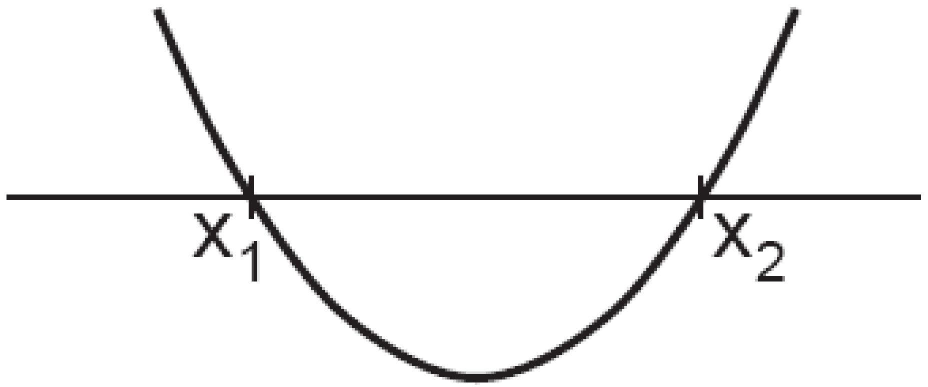
$x = 2$ ou $x = 3$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Zeros de uma função do segundo grau.

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ $\quad\quad$ $f(x) = 0$

$\Delta > 0$ A equação tem duas raízes diferentes. A parábola corta o eixo dos x em dois pontos distintos.

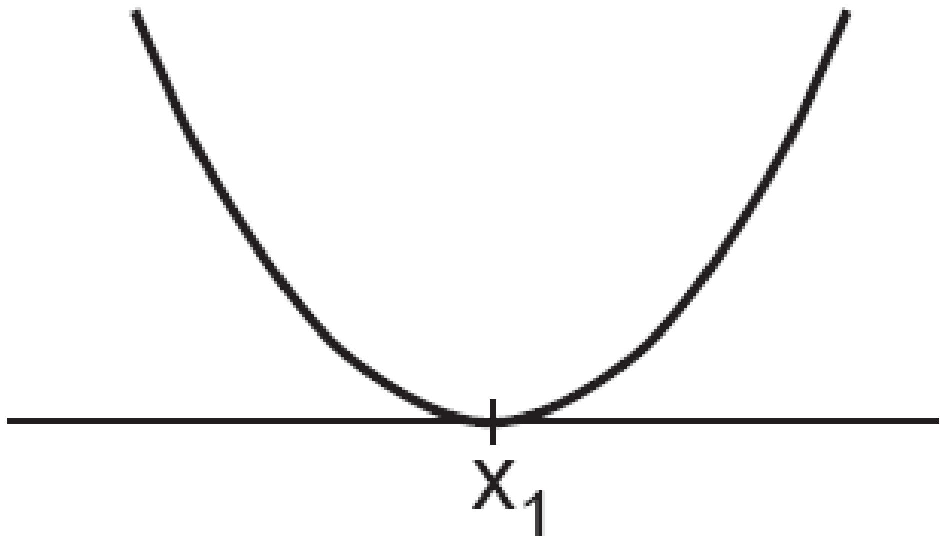


Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Zeros de uma função do segundo grau.

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ $\qquad$ $f(x) = 0$

$\Delta = 0$ $\qquad$ A equação tem duas raízes iguais. A parábola corta o eixo dos x em dois pontos iguais.



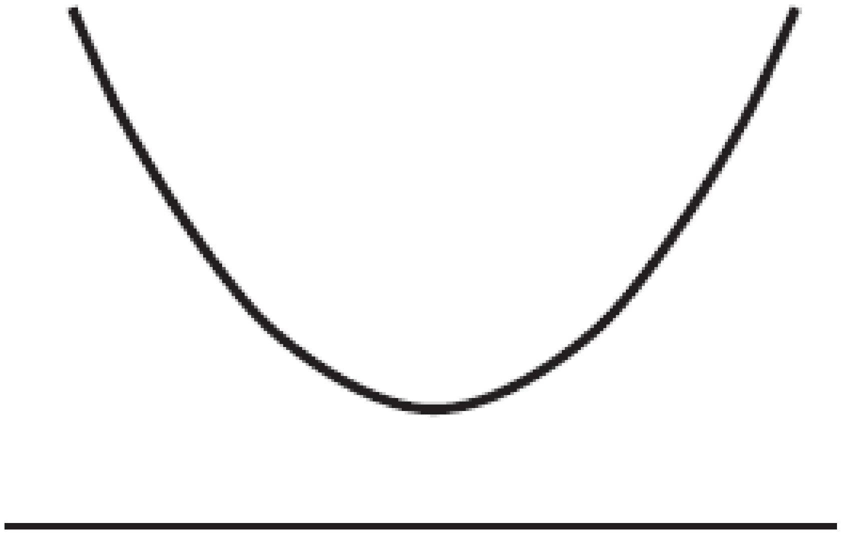
Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Zeros de uma função do segundo grau.

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ $\qquad f(x) = 0$

$\Delta < 0$ A equação não possui raízes.

A parábola não corta o eixo dos x.

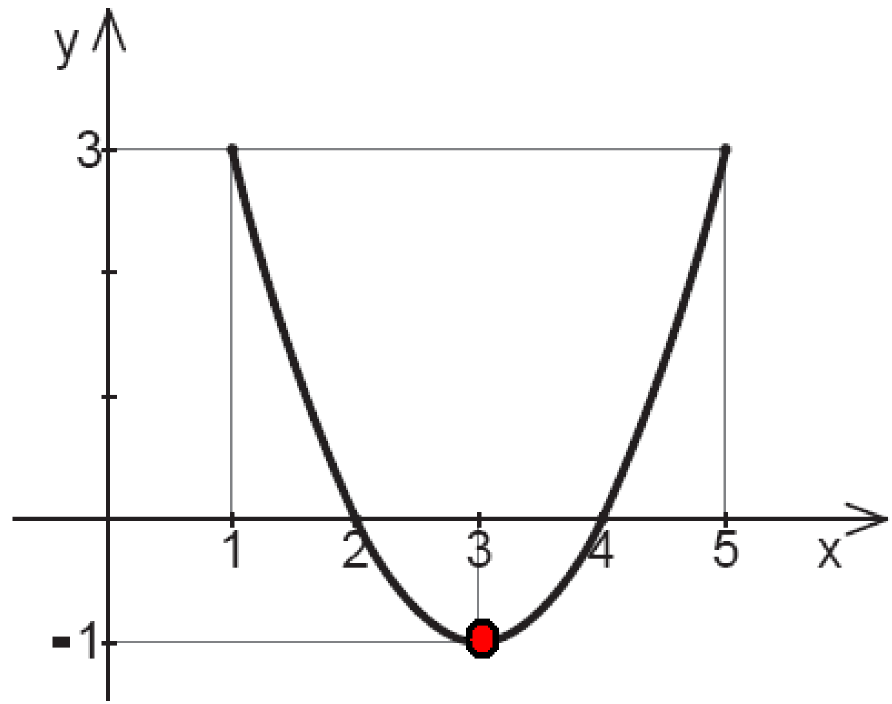


Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – O vértice de uma função do segundo grau.

$y = f(x) = x^2 – 6x + 8$ $x_1 = 2x_2 = 4$

	x	y
	1	3
$x_1 = 2$	2	0
$\frac{x_1 + x_2}{2} = 3$	3	-1
$x_2 = 4$	4	0
	5	3



Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – O vértice de uma função do segundo grau.

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$

$$x_v = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$$x_v = \frac{1}{2}\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$x_v = \frac{1}{2}\left(\frac{-2b}{2a}\right)$$

$$\boxed{x_v = \frac{-b}{2a}}$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – O vértice de uma função do segundo grau.

Exemplo: Considere a função y = x² - 4x + 5. Como a = 1, ela tem concavidade voltada para cima.

Para fazer um esboço de seu gráfico, determinamos seu vértice.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$$

$$y_v = 2^2 - 4 \times 2 + 5$$

$$y_v = 4 - 8 + 5 \qquad \boxed{y_v = 1}$$

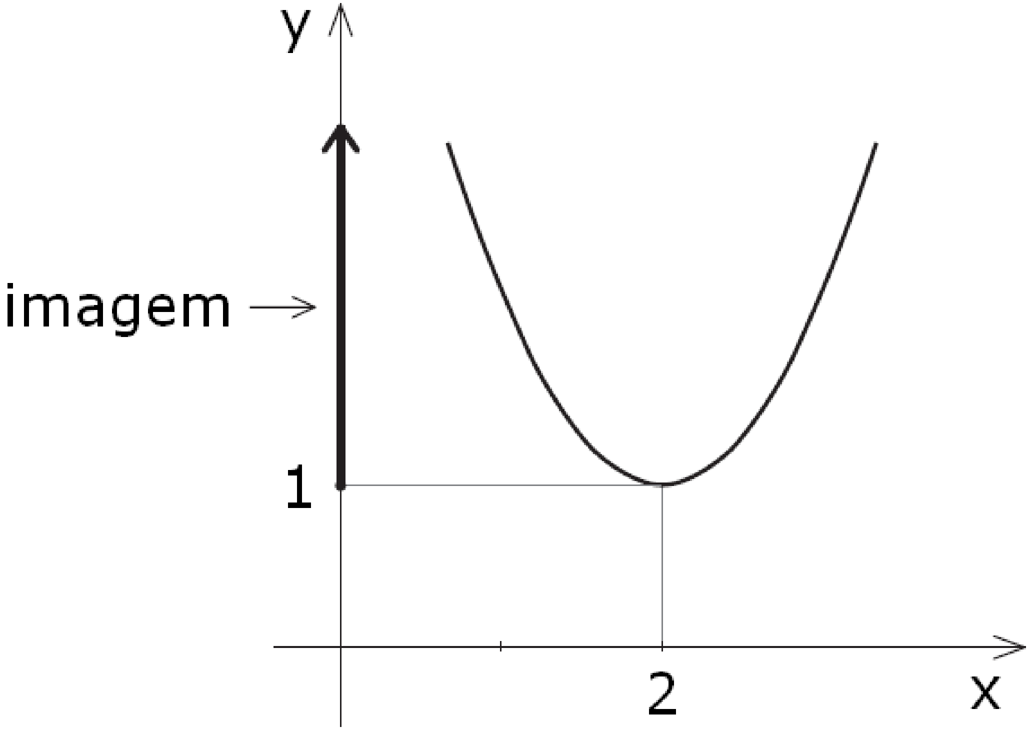
Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – O vértice de uma função do segundo grau.

Portanto, o vértice é o ponto (2, 1) e, como a concavidade está voltada para cima, o gráfico tem esta forma:

A imagem da função é então o conjunto dos valores de y tais que y >= 1.

$\mathrm{Im}(f) = \{y \in R \mid y >= 1\}$



Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Função do segundo grau.

Exercícios: Faça o gráfico das funções determinando, se possível, as raízes e o vértice da parábola.

$$(1)\quad y = x^2 - 6x + 7$$

$$(2)\quad y = x^2 - 4x + 5$$

$$(3)\quad y = -x^2 + 6x - 5$$

$$(4)\quad y = x^2 + 2$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Função do segundo grau. Estudo do sinal

O estudo do sinal depende do coeficiente **a** e do discriminante **Δ.**

Ele é obtido analisando a concavidade da parábola.

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Função do segundo grau. Estudo do sinal

Caso $\Delta < 0$

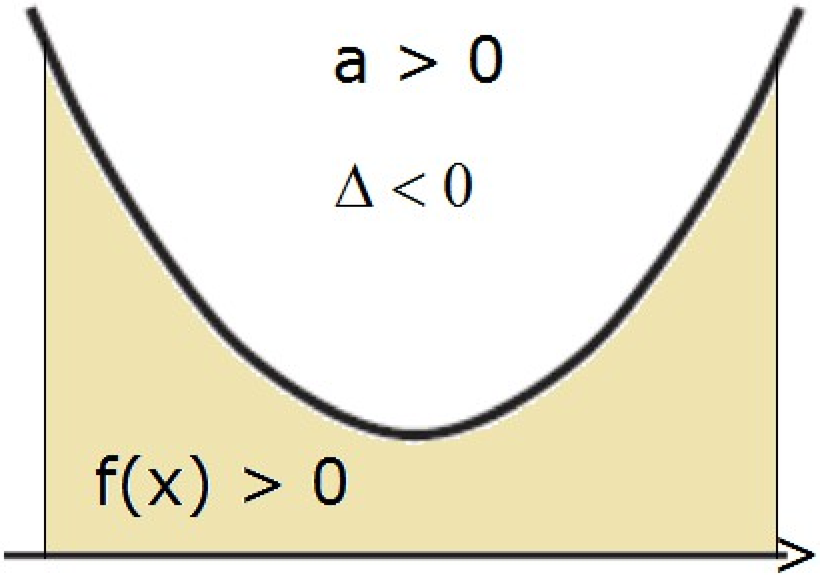
Neste caso, a parábola da função não corta o eixo das absissas. Portanto:

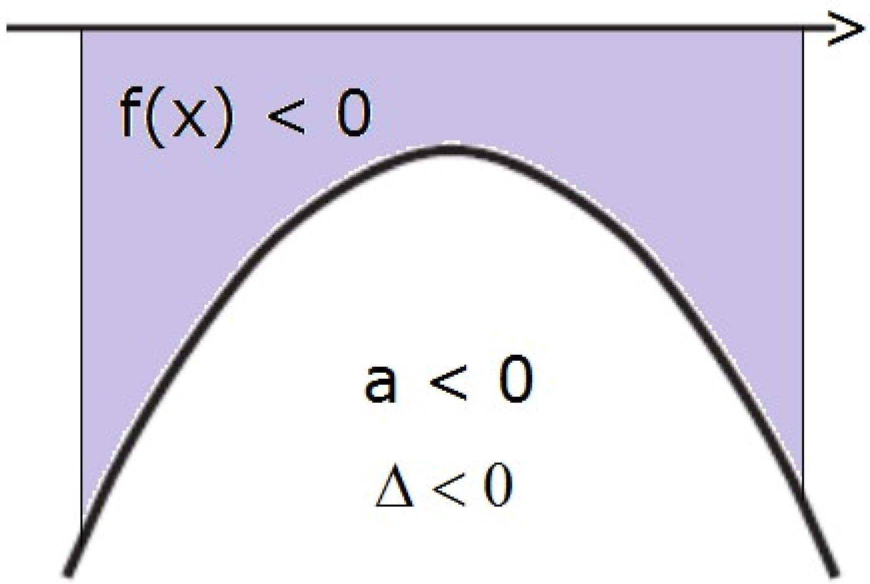
$$a > 0 \longrightarrow f(x) > 0 \text{ para todo } x \text{ real}$$

$$a < 0 \longrightarrow f(x) < 0 \text{ para todo } x \text{ real}$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Função do segundo grau. Estudo do sinal





Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Função do segundo grau. Estudo do sinal

Caso $\Delta = 0$

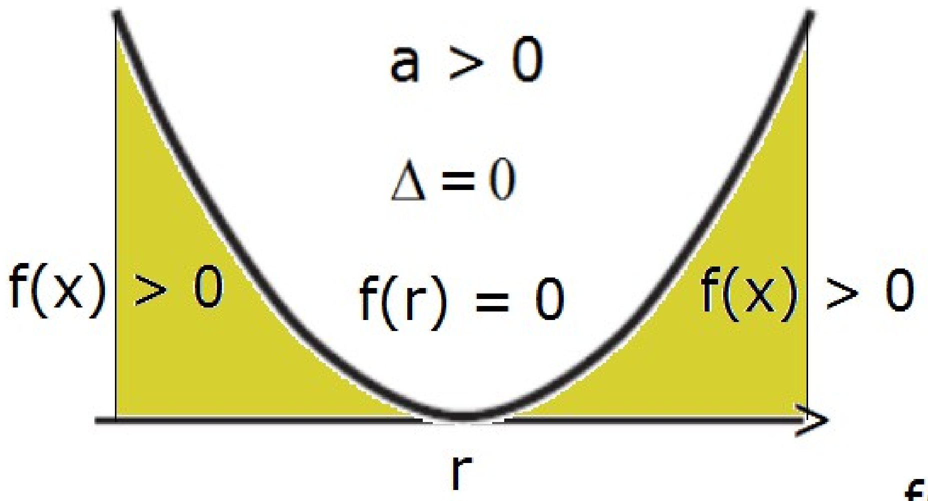
Neste caso, a parábola da função corta o eixo das absissas em apenas um ponto r. Portanto:

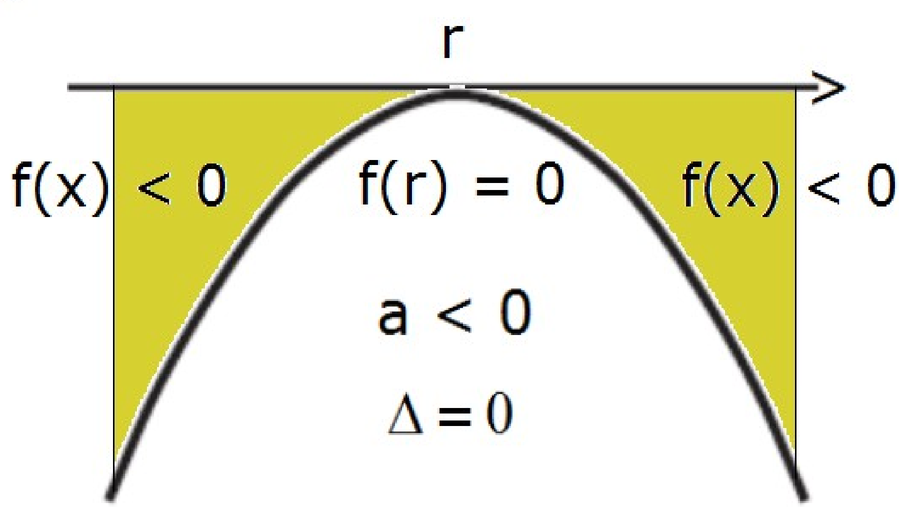
$a > 0 \longrightarrow f(x) > 0$ para todo x real, $x \neq r$

$a < 0 \longrightarrow f(x) < 0$ para todo x real, $x \neq r$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Função do segundo grau. Estudo do sinal





Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Função do segundo grau. Estudo do sinal

Caso $\Delta > 0$

Neste caso, a parábola da função corta o eixo das absissas em dois pontos r e s (r < s). Portanto:

$$a > 0 \longrightarrow \quad f(x) > 0 \text{ para todo x real,}$$

$$x < r \text{ ou } x > s \qquad (r < s)$$

$$f(x) < 0 \text{ para todo x real,}$$

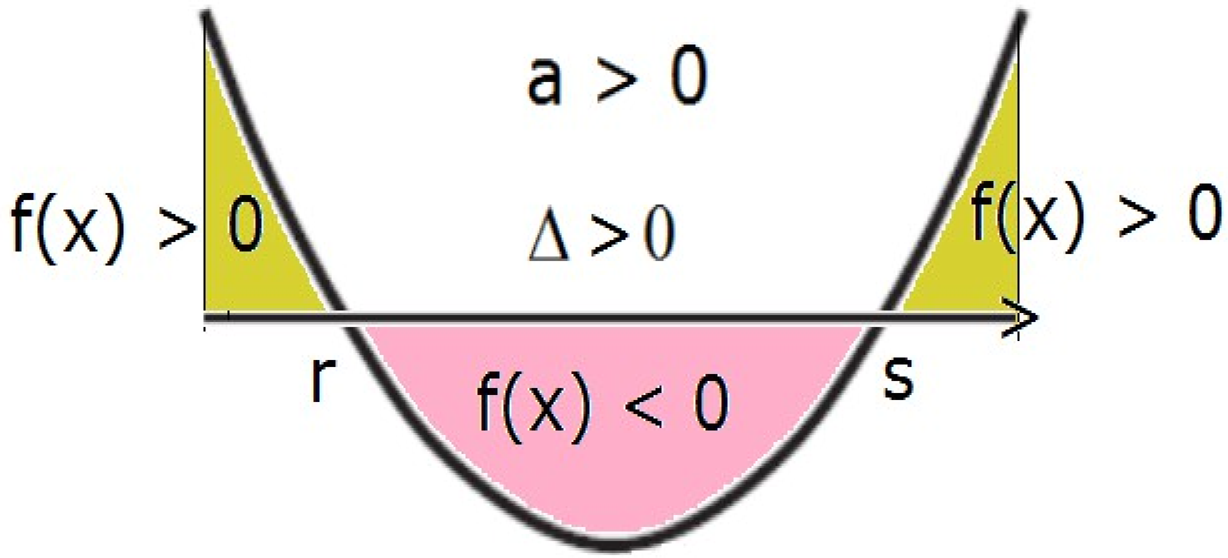
$$r < x < s \qquad (r < s)$$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Função do segundo grau. Estudo do sinal

$f(x) = 0$ para $x = r$ ou $x = s$, isto é,

$f(r) = 0$ e $f(s) = 0$



Unidade II – Função do segundo grau. Estudo do sinal

Caso $\Delta > 0$

$a < 0 \longrightarrow$ $f(x) < 0$ para todo x real,

$x < r$ ou $x > s$ $(r < s)$

$f(x) > 0$ para todo x real,

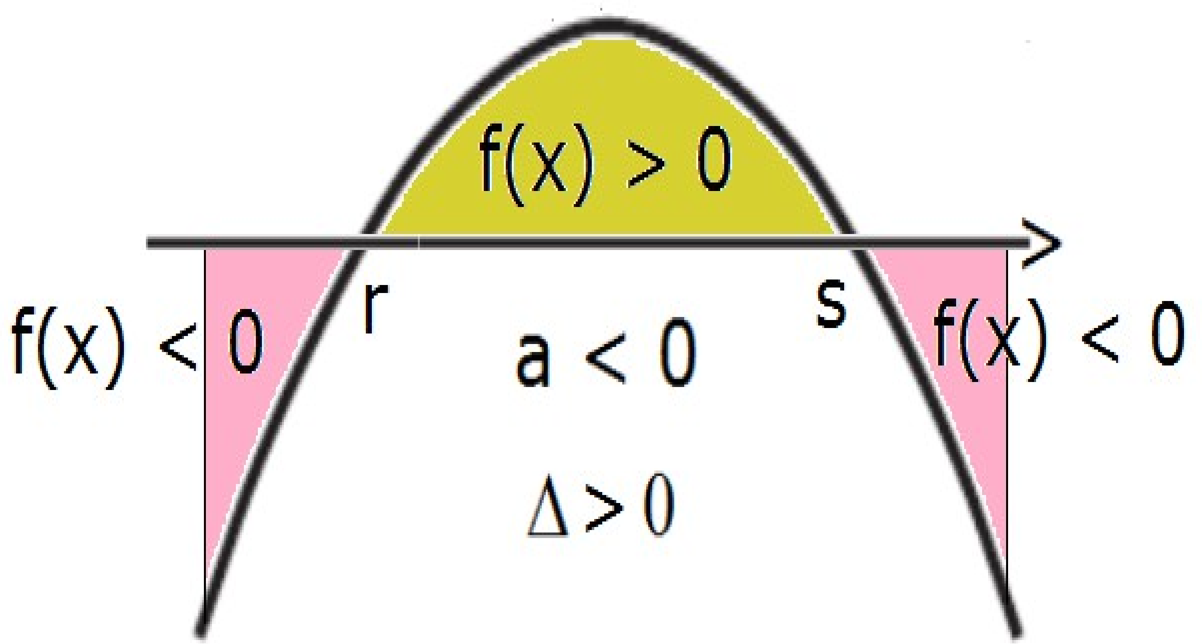
$r < x < s$ $(r < s)$

Cálculo Diferencial e Integral I

Unidade II – Função do segundo grau. Estudo do sinal

f(x) = 0 para x = r ou x = s, isto é,

f(r) = 0 e f(s) = 0



Perguntaram a Buda

o que mais o surpreende na Humanidade?

Compenetrado, o sábio respondeu:

– Os homens perdem a saúde para juntar dinheiro e depois perdem o dinheiro para recuperarem a saúde. Por pensarem ansiosamente no futuro, esquecem o presente de tal forma que acabam por nem viver no presente nem no futuro. Vivem como se nunca fossem morrer e morrem como se nunca tivessem vivido.