Matemática Instrumental –2008.1

Aula 6 –Equações do 2º grau com uma variável. Resolução de problemas.

Objetivos:

- Conceituar e classificar equações do segundo grau.
- Resolver equações do segundo grau.
- Resolver problemas de equações do segundo grau.
- Resolver sistemas que se reduzem a equações do segundo grau.
- Equacionar e resolver problemas envolvendo sistemas de equações do segundo grau.

8 – Equações do 2º grau com uma variável.

8.1 – Definição. Tipos de equações do 2º grau.

Equação é toda sentença matemática aberta representada por uma igualdade, em que exista uma ou mais letras que representam números desconhecidos.

Equação do 2º grau é toda equação que, após as simplificações, se apresenta na forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são números reais quaisquer e a ≠ 0.

Exemplos: (1) $x^2 - 4x + 11 = -4$
(2) $3x^2 - 7x + 20 = 4x^2 + 5x - 7$

Forma geral: $ax^2 + bx + c = 0$,

em que **x** representa a variável (incógnita) e **a, b** e **c** são números racionais, com **a ≠ 0**. Dizemos que **a, b** e **c** são os coeficientes da equação.

($ax^2 + bx + c = 0$, é a forma mais simples da equação do 2º grau).

Exemplos:

(1) $x^2 - 7x + 6 = 0$
(2) $x^2 - 7x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 7x + 0 = 0$
(3) $x^2 + 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 0x + 6 = 0$
(4) $3x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 + 0x + 0 = 0$

4 + 7 = 11, (é uma igualdade, mas não possui uma variável, portanto não é uma equação do 2º grau)

3x – 12 = 13, (possui uma variável, mas não é uma equação do 1º grau)

Devemos observar duas partes em uma equação, o 1º membro à esquerda do sinal de igual e o 2º membro à direita do sinal de igual.

$$3x^2 - 7x + 20 = 4x^2 + 5x - 7$$

Conjunto Solução: Conjunto formado por valores reais que tornam a sentença verdadeira. Representamos pela letra **S.**

Exemplo: Dentre os elementos do conjunto **S** = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, qual deles torna a sentença matemática $x^2 - 7x + 6 = 0$, verdadeira?

$0^2 - 7\times 0 + 6 = 6$	Errado
$1^2 - 7\times 1 + 6 = 0$	Verdadeiro
$2^2 - 7\times 2 + 6 = -4$	Errado
$3^2 - 7\times 3 + 6 = -6$	Errado
$4^2 - 7\times 4 + 6 = -6$	Errado
$5^2 - 7\times 5 + 6 = -4$	Errado
$6^2 - 7\times 6 + 6 = 0$	Verdadeiro
$7^2 - 7\times 7 + 6 = 6$	Errado

Devemos observar que é o conjunto **S** = {1, 6}.

Classificação das equações do 2º grau.

Completa – Toda equação do 2º grau que se apresenta na forma

$ax^2 + bx + c = 0$ com a, b, c ≠ 0;

Incompleta – Toda equação do 2º grau que se apresenta na forma

$ax^2 + bx + c = 0$ com a ≠ 0 e
b = 0 ou
c = 0 ou
b = 0 e c = 0.

Exemplos:

(1)	$x^2 - 7x + 6 = 0$		Completa	
(2)	$x^2 - 7x = 0$	$\Leftrightarrow$	$x^2 - 7x + 0 = 0$	Incompleta
(3)	$x^2 + 6 = 0$	$\Leftrightarrow$	$x^2 + 0x + 6 = 0$	Incompleta
(4)	$3x^2 = 0$	$\Leftrightarrow$	$3x^2 + 0x + 0 = 0$	Incompleta

8.2 – Raizes da equação do 2º grau.

Um dado número é chamado de raiz da equação, quando este torna a igualdade verdadeira.

Verificando se um dado número é raiz da equação:

Exemplos: Vamos verificar se os números 4, 5 e 6 são raizes da equação $x^2 - 7x + 6 = 0$.

$$4^2 - 7 \times 4 + 6 = 16 - 28 + 6 = -12 + 6 = -6 \qquad \text{(4 não é raiz)}$$
$$5^2 - 7 \times 5 + 6 = 25 - 35 + 6 = -10 + 6 = -4 \qquad \text{(5 não é raiz)}$$
$$6^2 - 7 \times 6 + 6 = 36 - 42 + 6 = -6 + 6 = 0 \qquad \text{(6 é raiz)}$$

8.2.1 – Resolvendo Equações do 2º grau. Determinação das raizes.

Resolver uma equação do 2º grau significa determinar as raizes ou o conjunto solução dessa equação, caso exista solução.

Exemplo:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$
$$(x-3)^2 = 0$$
$$\text{Observe que} \quad (x-3)^2 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$$
$$(x-3)(x-3) = 0$$
$$x - 3 = 0 \quad ou \quad x - 3 = 0$$
$$x' = 0 \quad ou \quad x'' = 0$$

8.2.2 – Revisando produtos notáveis:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

8.2.3 – Resolvendo equações do 2º grau incompletas

Exemplo: (1)

$$x^2 = 0$$
$$x \times x = 0$$
$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0$$
$$x' = 0 \quad \text{ou} \quad x'' = 0$$

Exemplo: (2) $x^2 - 6x = 0$

$x(x-6) = 0$

$x = 0$ ou $x-6 = 0$

$x = 0$ ou $x = 6$

$x' = 0$ ou $x'' = 6$

Exemplo: (3) $x^2 - 9 = 0$

$(x+3)(x-3) = 0$

$x+3 = 0$ ou $x-3 = 0$

$x = -3$ ou $x = 3$

$x' = -3$ ou $x'' = 3$

Exemplo: (4) $(x-3)^2 = 16$

$(x-3)(x-3) = 16$

$x-3 = 4$ ou $x-3 = -4$

$x = 4+3$ ou $x = -4+3$

$x' = 7$ ou $x'' = -1$

8.2.4 – Resolvendo equações do 2º grau completas

Exemplo: (5) $x^2 + 6x = 16$

$x^2 + 6x + 9 = 16 + 9$

$(x+3)(x+3) = 25$

$x+3 = 5$ ou $x+3 = -5$

$x = 5-3$ ou $x = -5-3$

$x' = 2$ ou $x'' = -8$

Exemplo: (6) $x^2 - 6x + 8 = 0$

Comecemos completando o quadrado

$a^2 = x^2$ ==> $a = x$

$2ab = 6x$ ==> $2xb = 6x$ ==> $b = 3$ ==> $b^2 = 9$

$x^2 - 6x = -8$

$x^2 - 6x + 9 = -8 + 9$

Portanto $x^2 - 6x + 9 = 1$ pode ser escrito como

$(x-3)^2 = 1$ ou

$x-3 = \pm 1$

$x-3 = 1$ *ou* $x-3 = -1$

$x' = 3+1$ *ou* $x'' = 3-1$

$x' = 4$ *ou* $x'' = 2$

Utilizando a fórmula de Bháskara para resolver a equação: Ax²+Bx+C=0

Uma equação do segundo grau tem a forma geral $Ax^2 + Bx + C = 0$, onde os coeficientes A, B e C, são constantes conhecidas e $A \neq 0$.

A equação pode ter no máximo duas soluções, dependendo do valor do discriminante

$$\Delta = B^2 - 4AC.$$

Se $\Delta = 0$ a equação tem uma única solução,

Se $\Delta > 0$ a equação tem duas soluções distintas x' e x'', e

Se $\Delta < 0$ a equação não tem solução.

Para obtermos as soluções da equação do segundo grau utilizamos a fórmula de Báskara

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$$

Exemplo: (1) $x^2 - 6x + 8 = 0$

$$A = 1 \quad B = -6 \quad C = 8$$

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 8$$

$$\Delta = 36 - 32$$

$$\Delta = 4$$

$$\sqrt{\Delta} = 2$$

$$x = \frac{-6 \pm 2}{2 \times 1}$$

$$x' = \frac{-6+2}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$x'' = \frac{-6-2}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Exercícios: Resolver as seguintes equações do 2º grau com uma variável.

01) $x^2 + 2x + 1 = 0$

02) $5x - 2x^2 - 1 = 0$

03) $2x^2 - 14x + 12 = 0$

04) $7x - x^2 - 10 = 0$

05) $5x^2 - x + 7 = 0$

06) $-x^2 + 25 = 0$

07) $3x^2 - 7x + 2 = 0$

08) $-x^2 + 4x - 4 = 0$

09) $x^2 - \frac{1}{4} = 0$

10) $-5x^2 + 10x = 0$

11) $5x^2 - 6x + 5 = 0$

12) $-x^2 - 4x - 4 = 0$

13) $5 + x^2 = 9$

14) $7x^2 - 3x = 4x + x^2$

15) $\frac{4}{x} + \frac{x}{2} = 3; \quad x \neq 0$

16) $\frac{2x}{x-1} = \frac{5x+1}{(x-1)(x+2)} \quad ; \quad x \neq 1, \quad x \neq -2$

17) $\frac{4x}{5} = \frac{5}{x}$

18) $3 + \frac{5}{x-2} = -\frac{x+1}{x}$

19) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{3}{2}$

20) $\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{2}$

8.3 – Resolver problemas de equações do segundo grau

Exemplo: (1) Achar dois números sabendo que a soma e o produto deles valem, respectivamente, 30 e 224.

$$\begin{cases} x + y = 30 \\ x \times y = 224 \end{cases} \Rightarrow y = 30 - x$$

$$x(30 - x) = 224$$

$$30x - x^2 = 224 \qquad \Rightarrow \qquad -x^2 + 30x - 224 = 0$$

Exemplo: (2) A diferença entre o quadrado de um número e o seu dobro é 35. Qual é o número?

$$x^2 - 2x = 35$$

Exemplo: (3) Qual é o número que adicionado ao triplo de seu quadrado vale 14?

$$x + 3x^2 = 14$$

Exemplo: (4) Uma torneira leva ***x*** horas para encher um tanque. Uma segunda torneira leva 2 horas a mais que a primeira. Sabendo que abertas ao mesmo tempo levam 2 horas e 24 minutos para encher o tanque, em que tempo *x* a primeira torneira o faria sozinha ?

a) 3h b) 4h c) 5h d) 6h e) 7h

	Primeira torneira	Segunda torneira
Enche o tanque	$x \ \ hs$	$x+2 \ \ hs$
Fração do tanque em 1 h	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x+2}$

Fração do tanque em 1 h com as duas torneiras abertas

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2hs \ \ 24m} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{x+120m}=\frac{1}{144m}$$

Exercícios:

01) A metade do quadrado de um número menos o dobro desse número é igual a 30. Determine esse número.

02) Se do quadrado de um número subtrairmos 6, o resto será 30. Qual é esse número?

03) O produto de um número positivo pela sua terça parte é igual a 12. Qual é esse número?

04) Determine dois números consecutivos ímpares cujo produto seja 195.

05) A diferença entre as idades de dois irmãos é 3 e o produto de suas idades é 270. Qual é a idade de cada um?

06) Calcule as dimensões de um retângulo de 16 cm de perímetro e 15 cm^2 de área.

07) A diferença de um número e seu inverso é 8/3. Qual é esse número?

08) Um comboio percorre a distância de 18km com uma velocidade constante, em km/h. Se a velocidade diminuísse de 3km/h, o comboio demoraria mais uma hora no percurso. Então a velocidade do comboio, em km/h, é
a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

09) A soma de dois números é 3 e a soma de seus quadrados é 17. O produto desses números é
a) 4 b) −4 c) 5 d) −5 e) 6

10) Uma doceira preparou 315 doces em algumas horas. Para terminar este mesmo serviço duas horas mais cedo, ela precisaria produzir, em média, 10 doces a mais por hora de trabalho. O número médio de doces por ela produzido em cada hora de trabalho correspondeu a:

a) 45 b) 35 c) 21 d) 19 e) 9

11) Numa pesquisa eleitoral, vários jovens foram selecionados para aplicar 240 questionários numa determinada área. No dia marcado, cinco jovens não compareceram e cada um dos demais teve que passar oito questionários a mais. O número de jovens selecionados foi igual a:
a) 30 b) 40 c) 50 d) 60 e) 70

12) Um piloto faz uma viagem de ida e volta (sem escala) entre duas localidades A e B, que distam 75km, com velocidade constante. Na ida, o vento lhe é favorável, à velocidade de 20km/h; na volta, o vento, com a mesma velocidade, lhe é contrário. Sabendo que ele gastou o tempo total de 5 horas, podemos afirmar que a velocidade do avião, em km / h, é:

13) O lucro devido a comercialização de um produto é calculado pela equação $L = x^2 + 8x - 10$, onde x é a quantidade comercializada. Determinar o menor valor de x para o qual o lucro seja de R$ 2,00. (Funções quadráticas)

Referências Bibliográficas:

Silva, Sebastião Medeiros da. Matemática para os cursos de economia, administração e contabilidade. 5.ed. São Paulo: Editora Atlas, 1999.

Viveiro, Tânia Cristina Neto G.. Manual Compacto de Matemática: Teoria e Prática. 2.ed. São Paulo: Editora Rideel, 1996.

Giovanni, José Rui; Bonjorno, José Roberto; Giovanni Jr., José Rui, Matemática completa: ensino médio – vol. Único, São Paulo : Editora FTD, 2002.

Lemos, Aluisio Andrade; Higuchi, Fidefico; Fridman, Salomão, Matemática, São Paulo: Editora Moderna, 1976.

Bezerra, Manoel; Jairo, Questões de Matemática, São Paulo: Editora Nacional, 1976.

Sodré, Ulysses; Matemática para o Ensino Fundamental, Médio e Superior; http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/index.html - Out/2007

A Biblioteca Virtual do Estudante Brasileiro – Telecurso 2000 - www.passei.com.br/tc2000/matematica1

KlickEducação O Portal da Educação - http://www.klickeducacao.com.br

Exatas - http://www.exatas.mat.br/index.htm