Matemática Instrumental –2008.1

Aula 2 – Frações. Expressões numéricas com números fracionários.

Objetivos:

- Conceituar frações.
- Enumerar as propriedades operacionais das frações.
- Escrever frações na forma decimal.
- Transformar decimais em frações.
- Aplicar as propriedades operacionais dos números no desenvolvimento de expressões numéricas contendo frações.
- Enumerar os principais produtos notáveis.
- Utilizar os conceitos e as propriedades operacionais dos números na resolução de problemas.

2 – Frações.

2.1 – Operações com números fracionários.

2.1.1 – Adição e subtração

Sabemos que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = 0{,}5$

Portanto, **uma fração não se altera quando multiplicamos ou dividimos o numerador e o denominador pelo mesmo número**.

Para somar ou subtrair frações que tenham o mesmo denominador, basta somar ou subtrair os numeradores.

Exemplo: $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3-2}{5} = \frac{1}{5}$

Para somarmos ou subtrairmos frações com denominadores diferentes devemos transformar as frações dadas em outras, que sejam iguais às que temos, mas com denominadores iguais.

Utilizamos como novo denominador para cada fração o mínimo múltiplo comum (mmc) e obtemos o numerador de cada fração, multiplicando o numerador anterior pelo quociente do mínimo pelo denominador da mesma fração.

E-mails: damasceno1204@yahoo.com.br damasceno@interjato.com.br damasceno12@hotmail.com

$$mmc(4,5) = \begin{array}{c|c} 4,\ 5 & 2 \\ 2,\ 5 & 2 \\ 1,\ 5 & 5 \end{array}$$

$$mmc(4,5) = 2 \times 2 \times 5 = 20$$

Exemplo: $\frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{5 \times 2}{20} + \frac{4 \times 1}{20} = \frac{10}{20} + \frac{4}{20} = \frac{14}{20}$

Exemplo: $\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{3 \times 4}{15} - \frac{5 \times 2}{15} = \frac{12 - 15}{15} = \frac{-3}{15}$

2.1.2 – Multiplicação e divisão

Para multiplicar duas frações, multiplicamos os numeradores e os denominadores

Exemplo: $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 2}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{3 \times 2 \times 5}{5 \times 3 \times 4} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{3} \times \frac{2}{4} \times \frac{5}{5} = \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1 \times 1 \times 1}{1 \times 2 \times 1} = \frac{1}{2}$$

Para dividirmos uma fração por outra basta multiplicar a primeira pela segunda invertida.

Exemplo: $\frac{3}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{3 \times 3}{5 \times 2} = \frac{9}{10}$

$$Obs.: \ \frac{\frac{2}{3}}{\frac{7}{4}} = \frac{2}{3} \div \frac{7}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{7}$$

$$Obs.: \ 2 = \frac{2}{1}; \ \ 5 = \frac{5}{1}; \ \ 1 = \frac{1}{1};$$

2.1.3 – Cálculo de expressões numéricas.

Resolver as expressões numéricas:

(01) $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} \div \frac{7}{4}$ (02) $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} - \frac{7}{4}$

(03) $\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}-\frac{7}{4}\times\frac{2}{3}$ (04) $\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{6}-\frac{4}{5}\div\frac{2}{3}-\frac{1}{2}$

(05) $\frac{4}{3}+\frac{7}{5}(\frac{1}{2}+\frac{4}{9})-\frac{1}{5}$ (06) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}+1}{\frac{7}{3}-\frac{3}{7}+9}$

(07) $5-\{4+2[32-\frac{1}{4}(\frac{4}{6}-\frac{1}{8})+2]+16\}$

(08) $3\{-1+12[-13+4(1-\frac{1}{3})-1]-1$

2.2 – Números decimais.

2.2.1 – Transformações de frações em decimais.

Para transformarmos uma fração em um número decimal basta dividir o numerador pelo denominador.

Exemplo: $\frac{2}{5}=0,4$ $\frac{3}{4}=0,75$

$\frac{13}{5}=2,6$ $\frac{-23}{4}=-5,75$

$\frac{1}{3}=0,33333.....$

Transformar as seguintes frações em decimais:

(01) $\frac{2}{3}$ (02) $\frac{4}{7}$

(03) $\frac{5}{9}$ (04) $\frac{10}{3}$

2.2.2 – Transformações de decimais em frações.

Para transformarmos números decimais em números fracionários podemos utilizar o seguinte raciocínio:

multiplicamos o valor x a ser transformado sucessivamente por potências positivas de 10, até obtermos duas igualdades em que os segundos membros sejam números com partes decimais idênticas. Em seguida, por subtração, eliminamos as partes decimais obtendo o número escrito na forma fracionária.

Exemplo: $x = 0{,}5$ **==>** $10x = 5$ **==>**

$x = \frac{5}{10}$ **==>** $x = \frac{1}{2}$

Exemplo: $x = 4{,}12$ **==>** $10x = 41{,}2$ **==>** $100x = 412$ **==>**

$x = \frac{412}{100}$ **==>** $x = \frac{103}{25}$

Exemplo: $x = 0{,}333...$ **==>**

$10x = 3{,}333...$ **==>**

$10x - x = 3{,}333... - 0{,}333...$ **==>**

$9x = 3$ **==>**

$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

Exemplo: $x = 14{,}252525...$ **==>**

$10x = 142{,}52525...$ **==>**

$100x = 1425{,}252525...$ **==>**

$100x - x = 1425 - 14$ **==>**

$x = \frac{1411}{99}$

3 – Expressões algébricas.

As expressões que apresentam letras, além de operações e números são chamadas **expressões algébricas.**

As letras são as variáveis.

Exemplo: Uma pessoa ganha R$ 20,00 por dia de trabalho. Quanto essa pessoa ganhará por um certo número de dias trabalhado?

Para calcular quanto essa pessoa ganhará, podemos escrever a expressão algébrica:

20 . x

Observações:

1º) Nas expressões algébricas o sinal de multiplicação é opcional, veja:

3 . x se escreve **3x**
a . b . x se escreve **abx**

2º) Podemos ter expressões algébricas com uma variável, com mais de uma variável ou ainda sem variável:

2xy expressão com duas variáveis: **x** e **y**
$5a^2\, b\, c^3$ expressão com três variáveis: **a, b** e **c**
125 expressão sem variável.

3.1 – Valor numérico de uma Expressão algébrica.

Valor numérico da expressão é o resultado encontrado quando substituímos as variáveis de uma expressão por números e efetuamos as operações indicadas.

Exemplo: O valor numérico da expressão **5x + 4** para **x = 2**, é:

$$5 \times 2 + 4 = 10 + 4 = 14$$

A parte numérica de um monômio é o **coeficiente** e a outra parte formada por letras é a **parte literal**.

Dois ou mais monômios que possuem a mesma parte literal e coeficientes diferentes são chamados de **monômios semelhantes**.

Só podemos somar ou subtrair monômios que sejam semelhantes

Exemplo:
$$4xy + 7xy - 5xy =$$
$$(4 + 7 - 5)\, xy =$$
$$6xy$$

Exemplo:
$$a + 2a + 3a - 5a =$$
$$6a - 5a =$$
$$1a = a$$

Exemplo:
$$a + 2b + 3a - 5b =$$
$$a + 3a + 2b - 5b =$$
$$4a - 3b$$

Exemplo:
$$a + 2(a+3b) - 5(a - b) =$$
$$a + 2a + 6b - 5a + 5b =$$
$$a + 2a - 5a + 6b + 5b =$$
$$3a - 5a + 11b =$$
$$-2a + 11b$$

Exemplo:
$$(a + 2b)(a+3b) - (5 - a)(a - b) =$$

$$a\,(a+3b) + 2b\,(a+3b) - [5\,(a - b) - a(a - b)] =$$

$$a^2 + 3ab + 2ab + 6b^2 - [5a - 5b - a^2 + ab] =$$

$$a^2 + 3ab + 2ab + 6b^2 - 5a + 5b + a^2 - ab =$$

$$2a^2 + 4ab + 6b^2 - 5a + 5b =$$

Exemplo: Determine o valor numérico da expressão $x^3y^2 - x^2 + y^3$, para $x = 2$ e $y = -1$

$$x^3y^2 - x^2 + y^3$$

$x = 2$ e $y = -1$ $\Rightarrow$ $2^3(-1)^2 - 2^2 + (-1)^3 =$

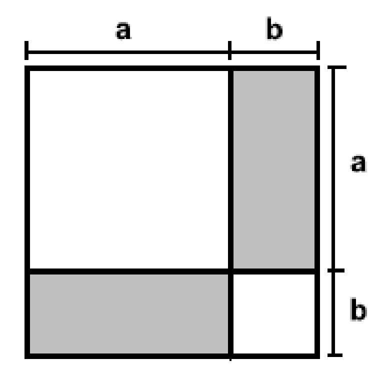
$$8 \,.\, 1 - 4 + (-1) =$$

$$8 - 4 - 1 =$$

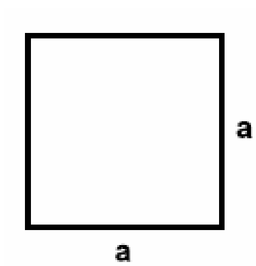
$$3$$

4 – Produtos notáveis.

4.1 – Primeiro Produto notável.



Área: $(a + b)^2$



Área: a^2

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

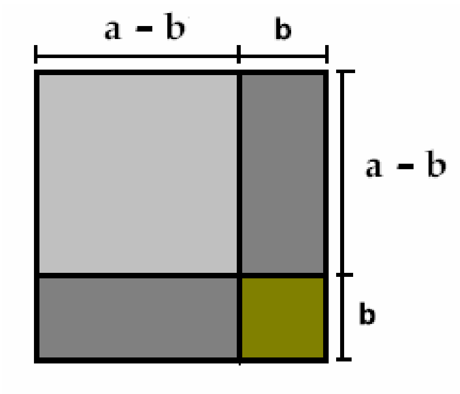
O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo, mais duas vezes o produto do 1º pelo 2º, mais o quadrado do 2º termo.

Exemplo: $(3x + 4y)^2 =$

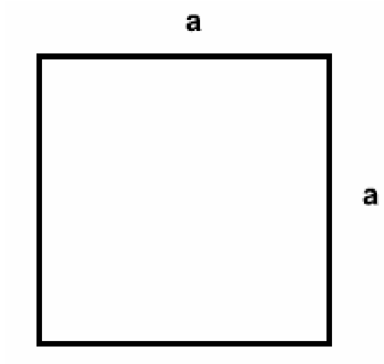
$$(3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2 =$$

$$9x^2 + 24xy + 16y^2$$

4.2 – Segundo Produto notável.



Área: $(a - b)^2$



Área: a^2

$$(a - b)^2 = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

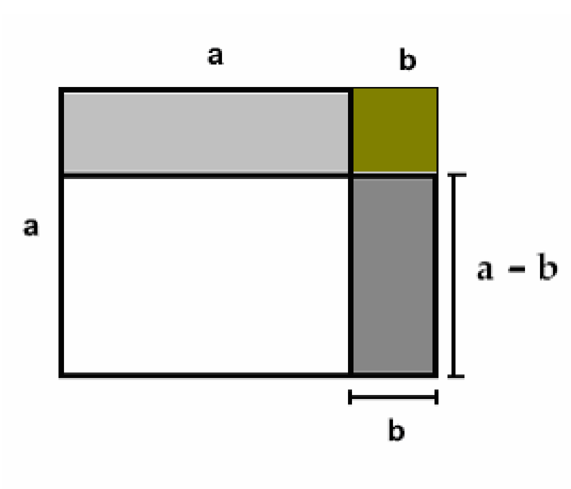
O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo, menos duas vezes o produto do 1º pelo 2º, mais o quadrado do 2º termo.

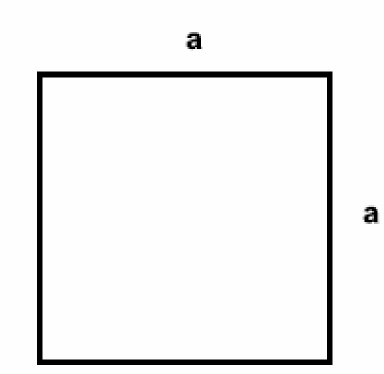
Exemplo: $(3x - 4y)^2 =$

$(3x)^2 - 2(3x)(4y) + (4y)^2 =$

$9x^2 - 24xy + 16y^2$

4.2 – Terceiro Produto notável.





Área: $(a - b)(a + b)$

Área: a^2

$$(a - b)(a + b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2$$

O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo menos o quadrado do 2º termo.

Exemplo: $(3x - 4y)(3x + 4y) =$

$(3x)^2 - (4y)^2 =$

$9x^2 - 16y^2$

4.3 – Potenciação.

Potenciação é o tipo de multiplicação, em que os fatores são todos iguais.

Exemplo: $10 \cdot 10 = 10^2$

Exemplo: $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$

Base da potência é o número que é multiplicado várias vezes por ele mesmo (no exemplo acima, é o número 10).

Expoente é o número que indica quantas vezes a base está sendo multiplicada (nos exemplos acima, são os números 2 e 3).

O resultado da potenciação é chamado de **potência**.

Exemplo: $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

que se lê: **4 elevado à 3ª potência** ou
4 à terceira ou ainda
4 ao cubo

Exemplo: $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

Exemplo: $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

4.3.1 – Observações importantes:

1. Se a base é igual a 1 e o expoente é qualquer número, então a potência é sempre igual a 1.

Exemplo: $1^5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

2. Se o expoente é igual a 1 e a base é qualquer número, então a potência é sempre igual à base.

Exemplo: $3^1 = 3$

3. Se a base é zero e o expoente é qualquer número diferente de zero, então a potência é sempre igual a zero.

Exemplo: $\mathbf{0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0}$

4. Se a base é 10 e o expoente é qualquer número diferente de zero, então a potência é um número que começa com 1 e tem um número de zeros igual ao expoente.

Exemplo: $\mathbf{10^2 = 10 \cdot 10 = 100}$

$\mathbf{10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100.000}$

5. Se a base é um número qualquer diferente de zero e o expoente é zero, então a potência, é sempre igual a 1.

Exemplo: $\mathbf{3^0 = 1}$

Observe o seguinte: $\mathbf{3^4 = 81}$

$\mathbf{3^3 = 27}$

$\mathbf{3^2 = 9}$

$\mathbf{3^1 = 3}$

$\mathbf{3^0 = 1}$

4.3.2 – Regras da potenciação.

Primeira propriedade: Produto de potências de mesma base

$\mathbf{5^3 \cdot 5^4 = (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) =}$

$\mathbf{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 =}$

$\mathbf{5^{(3+4)} = 5^7}$

Para multiplicar potências de mesma base, repetimos a base e somamos os expoentes.

$$\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Segunda propriedade: Divisão de potências de mesma base

$\mathbf{5^7 / 5^4 = (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) / (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) =}$

$\mathbf{5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^{(7-4)} = 5^3}$

Para dividir potências de mesma base, repetimos a base e subtraímos os expoentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Terceira Propriedade: Potenciação de potência

$$\mathbf{(3^2)^3 = 3^2 \bullet 3^2 \bullet 3^2 = 3^{2+2+2} = 3^{2\bullet 3} = 3^6}$$

Para elevar uma potência a um outro expoente, repetimos a base e multiplicamos os expoentes.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Quarta propriedade: Distributividade em relação à multiplicação e à divisão

Para elevar um produto ou um quociente a um expoente, elevamos cada fator a esse expoente ou, no caso do quociente, elevamos o dividendo e o divisor ao mesmo expoente.

$$(a \times b)^m = a^m \times b^m$$

$$(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Exercícios:

Efetuar as operações indicadas em cada um dos casos seguintes:

(1) $(x+y)^2 + (x-y)^2$

(2) $(x+y)^2 - (x-y)^2$

(3) $(3x+4y)^2 + (3x-4y)^2$

(4) $(3x+4y)^2 + (3x+4y)(3x-4y) + (3x-4y)^2$

Assinale a alternativa correta:

(1) $(3x-4y)^2$ é igual a

(a) $3x^2 - 12xy + 4y^2$

(b) $9x^2 - 24xy + 16y^2$

$(c)\ 9x^2 - 16y^2$

$(d)\ 3x^2 - 4y^2$

(2) $(x+y)(x-y)$ é igual a

$(a)\ x^2 + y^2$

$(b)\ x^2 - y^2$

$(c)\ x^2 + 2xy + y^2$

$(d)\ x^2 - 2xy + y^2$

(3) $(3x-4y)(3x+4y)$ é igual a

$(a)\ 3x^2 - 12xy + 4y^2$

$(b)\ 9x^2 - 24xy + 16y^2$

$(c)\ 9x^2 - 16y^2$

$(d)\ 3x^2 - 4y^2$

(4) $(x-y)^2$ é igual a

$(a)\ x^2 + y^2$

$(b)\ x^2 - y^2$

$(c)\ x^2 + 2xy + y^2$

$(d)\ x^2 - 2xy + y^2$

Desenvolver os produtos:

(1) $(\frac{4}{5}x - \frac{2}{3}y)^2$

(2) $(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y)^2$

(3) $(3x+4y)(3x-4y)$

(4) $(\sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{2}})^2$

Resolver os seguintes expressões:

$a)\ (-x+2)^2$

$b)\ (x^3 + 3x^2)^2$

$c)\ (\frac{x}{y} + \frac{y}{x})^2$

$d)\ (-2x - \frac{1}{2})^2$

$e)\ (x^2 + y^3)(x^2 - y^3)$ $f)\ (x^2 + \frac{1}{3})(x^2 - \frac{1}{3})$

$g)\ (3y^2 - \frac{1}{2})(3y^2 + \frac{1}{2})$ $h)\ (\frac{3}{4}y^2 - \frac{x}{2})(\frac{3}{4}y^2 + \frac{x}{2})$

$i)\ (x+2)(x+3)$ $j)\ (x-5)(x-1)$

$k)\ (x+7)(x-2)$ $l)\ (x-8)(x+3)$

$m)\ (x+5a)(x+3a)$ $n)\ (x-8a)(x+3a)$

$o)\ (x-a)(x-3a)$

Efetuar as seguintes expressões:

$a)\ (-x+2)^2 + (x-1)^2$ $b)\ (2x+3)^2 + (x+5)^2$

$c)\ (3x-1)^2 - (2x-1)^2$ $d)\ (1-2x)^2 + (x+3)(x-3)$

$e)\ (x-1)^2 - (2x+4)(2x-4)$ $f)\ (x+1)(x-1) - (x+3)(x+5)$

Simplificar as seguintes expressões:

$a)\ \dfrac{x^2+3x+2}{x^2+2x+1}$ $b)\ \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$

$c)\ \dfrac{x+5+xy+5y}{x+5}$ $d)\ \dfrac{x^5y-xy}{x^2y-xy}$

Transformar as seguintes decimais em frações:

(01) 0,555... (02) 12,777...

(03) 4,3181818... (04) 14,3125125...

Resolver os seguintes problemas:

(01) O valor de x que é solução, nos números reais, da equação

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{x}{48}$ é igual a

a) 36
b) 44
c) 52
d) 60
e) 68 Resp.: c

(02) Ao efetuar compras gastei $\frac{1}{4}$ com livros, $\frac{1}{5}$ com cadernos e $\frac{3}{8}$ com alimentação. Fiquei ainda com R$ 210,00. Quanto eu tinha antes de efetuar as compras? Resp.: R$ 1.200,00

(03) Se $\frac{3}{5}$ do meu ordenado corresponde a R$ 300,00, $\frac{1}{5}$ do meu ordenado corresponderá a

a) R$ 50,00
b) R$ 100,00
c) R$ 200,00
d) R$ 300,00
e) R$ 50,00 Resp.: b

(04) Quanto vale $\frac{3}{5}$ de R$ 100,00 mais $\frac{2}{3}$ de R$ 300,00 mais $\frac{3}{4}$ de R$ 200,00 mais $\frac{3}{8}$ de R$ 400,00 ? Resp.: R$ 560,00

(05) Um aluno da FARN é obrigado a freqüentar 75% das aulas de Matemática. Das 36 aulas ele faltou 5. Quantos no máximo ele ainda poderá faltar?
Resp.: 4

(06) Comprei um apartamento por R$ 420.000,00. Paguei $\frac{2}{3}$ de entrada e o resto em 10 prestações iguais. Qual a fração correspondente a cada prestação? Resp.: $\frac{1}{30}$

(07) Pedro gastou $\frac{1}{3}$ da quantia que possuía com roupa e $\frac{2}{5}$ do que restou com livros. Ficou ainda com R$ 60,00. Quanto possuía Pedro?

Resp.: R$ 150,00

(08) A soma da metade com a terça parte da quantia que certa pessoa tem é igual a R$ 15,00. Quanto possui esta pessoa? (C. Pedro II – 1943)
Resp.: R$ 18,00

(09) Pedro e Paulo encarregados de uma obra, fariam todo o trabalho em 12 dias. No fim do quarto dia de trabalho, Pedro adoeceu e Paulo concluiu o serviço em dez dias. Que fração da obra cada um executou? (C. Naval – 1961) Resp.: 1/6 e 5/6

(10) Num time de futebol carioca, metade dos jogadores são cariocas, um terço são de outros estados e quatro são estrangeiros. Quantos jogadores contratados tem o clube?
Resp.: 24

(11) Paulo e Antônio têm juntos R$ 1230,00. Paulo gastou $\frac{2}{5}$ e Antônio $\frac{3}{7}$ do que possuíam, ficando com quantias iguais. Quanto possuía cada um? (C. Naval – 1953) Resp.: R$ 600,00 e R$ 630,00

(12) Quais os resultados das seguintes expressões:
a) 32 + 0,32
b) 25 – 2,5
c) 3,2 + 25 – 0,02

(13) Efetuar as operações:
a) $0{,}001 \times 27 \div 0{,}003$
b) $0{,}1^2 \times 0{,}2^2 \div 0{,}5^2$
c) $0{,}001 \times 27 + 0{,}003 \div 0{,}06$

(14) Calcule as geratrizes das seguites dízimas periódicas:
a) 0,666....
b) 0,242424....
c) 2,123123123...

Referências Bibliográficas:

Silva, Sebastião Medeiros da. Matemática para os cursos de economia, administração e contabilidade. 5.ed. São Paulo: Editora Atlas, 1999.

Viveiro, Tânia Cristina Neto G.. Manual Compacto de Matemática: Teoria e Prática. 2.ed. São Paulo: Editora Rideel, 1996.

Giovanni, José Rui; Bonjorno, José Roberto; Giovanni Jr., José Rui, Matemática completa: ensino médio – vol. Único, São Paulo : Editora FTD, 2002.

Lemos, Aluisio Andrade; Higuchi, Fidefico; Fridman, Salomão, Matemática, São Paulo: Editora Moderna, 1976.

Bezerra, Manoel; Jairo, Questões de Matemática, São Paulo: Editora Nacional, 1976.

Sodré, Ulysses; Matemática para o Ensino Fundamental, Médio e Superior; http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/index.html - Out/2007

Telecurso 2000 - Matemática - http://www.bibvirt.futuro.usp.br/ - http://www.bibvirt.futuro.usp.br/textos/telecurso_2000

Telecurso 2000 - Matemática - http://www.bibvirt.futuro.usp.br/ - http://www.bibvirt.futuro.usp.br/textos/telecurso_2000

KlickEducação O Portal da Educação - http://www.klickeducacao.com.br

Exatas - http://www.exatas.mat.br/index.htm

Só Matemática- http://www.somatematica.com.br/

Matemática.com.br - http://matematica.com.br/