Determinante de uma matriz

Seja A uma matriz quadrada de ordem 2

A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Definimos det(A) = $a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$

Ex.: Seja A a matriz

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ Então, det(A) = 1x3 – 1x2 = 3 – 2 = 1

Determinante de uma matriz 3 x 3 – Regra de Sarrus (Pierre Frédéric Sarrus)

Seja A uma matriz quadrada de ordem 3

A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

Definimos det(A) =
$a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} -$
$a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$

Regra de Sarrus

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$$

Ex.: Seja A a matriz

A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ $\qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

Então, det(A) = 1x5x9 + 2x6x7 + 3x4x8 – 3x5x7 – 1x6x8 – 2x4x9 =
= 45 + 84 + 96 – 105 – 48 – 72 = 0

Permutações de dois inteiros

Existem 2 = 2! permutações distintas do conjunto {1, 2}

{1, 2}   {2, 1}

O número de inversões na permutação {1, 2} é igual a 0

O número de inversões na permutação {2, 1} é igual a 1

Uma permutação é chamada par se o número total de inversões é um inteiro par.

Uma permutação é chamada ímpar se o número total de inversões é um inteiro ímpar.

{1, 2} é uma permutação par

{2, 1} é uma permutação ímpar

Permutações de três inteiros

Existem 6 = 3! permutações distintas do conjunto {1, 2, 3}

{1, 2, 3}   {1, 3, 2}   {2, 1, 3}   {2, 3, 1}   {3, 1, 2}   {3, 2, 1}

O número de inversões na permutação {1, 2, 3} é igual a 0

O número de inversões na permutação {1, 3, 2} é igual a 1

O número de inversões na permutação {2, 1, 3} é igual a 1 + 0 = 1

O número de inversões na permutação {2, 3, 1} é igual a 1 + 1 = 2

O número de inversões na permutação {3, 1, 2} é igual a 2 + 0 = 2

O número de inversões na permutação {3, 2, 1} é igual a 2 + 1 = 3

{1, 2, 3} é uma permutação par

{1, 3, 2} é uma permutação ímpar

{2, 1, 3} é uma permutação ímpar

{2, 3, 1} é uma permutação par

{3, 1, 2} é uma permutação par

{3, 2, 1} é uma permutação ímpar

Seja A uma matriz quadrada de ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$ Definimos det(A) = $a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$

Observe que as ordens das linhas nos elementos da definição de det(A) permanecem fixas e igual a {1, 2}, enquanto que as ordens das colunas variam em cada parcela, correspondendo a uma permutação de {1, 2}. O sinal de cada parcela é dado pela classificação da permutação corresponde (par ou ímpar).

Seja A uma matriz quadrada de ordem 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Definimos det(A) =

$a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} -$

$a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$

O mesmo acontece com det(A), as ordens das linhas nos elementos da definição de det(A) permanecem fixas e igual a {1, 2, 3}, enquanto que as ordens das colunas variam em cada parcela, correspondendo a uma permutação de {1, 2, 3}.

O sinal de cada parcela é dado pela classificação da permutação corresponde (par ou ímpar).

Estas definições podem ser aplicadas para matrizes de ordem n x n, onde n é um inteiro maior ou igual a 2.

Calculando determinante através de redução por linhas

Teorema: Seja A uma matriz quadrada.

(a) Se A tem uma linha ou uma coluna de zeros, então det(A) = 0
(b) det(A) = det(A^T)

Teorema: Se A é uma matriz quadrada triangular n x n, então

det(A) = $a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \ldots a_{nn}$

Teorema: Seja A uma matriz n x n.

(a) Se B é a matriz que resulta quando uma única linha ou uma única coluna de A é multiplicada por um escalar k, então det(B) = k det(A)
(b) Se B é a matriz que resulta quando duas linhas ou duas colunas de A são permutadas, então det(B) = – det(A)
(c) Se B é a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha de A é somado a outra linha, então det(B) = det(A)

(d) Se B é a matriz que resulta quando um múltiplo de uma coluna de A é somado a outra coluna, então det(B) = det(A)

Teorema: Se A é uma matriz quadrada n x n com duas linhas ou duas colunas proporcionais, então det(A) = 0.

Notação: Seja A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \text{então} \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Ex.: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$;

$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$ as colunas 1 e 3 foram permutadas;

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3$ 7 vezes a última linha foi somada a primeira

Ex.: $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0$;

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Calculando determinante através de redução por linhas

Ex.: Calcule det(A), onde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$-3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} = -3 \times 1 \times 1 \times (-55) = 165$$

Propriedades básicas dos determinantes:

(a) Se A é uma matriz n x n e k um escalar, então det(kA) = k^n det(A)

(b) Se A e B são matrizes quadradas n x n, então det(AB) = det(A)det(B)

(c) Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, det(A) ≠ 0

(d) Se A é invertível, então $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Sistemas lineares da forma AX = λX

AX = λX <=> (A − λI)X = 0

Os valores de λ para os quais o sistema tem uma solução não trivial (X = 0) são chamados de autovalores.

Se λ é um autovalor de A,então cada solução não trivial de (A − λI)X = 0 é chamada um autovetor de A associado ao autovalor λ.

Ex.: Considere o sistema

$$\begin{cases} x + 3y = \lambda x \\ 4x + 2y = \lambda y \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff$$

$$\left(\begin{bmatrix}1 & 3\\4 & 2\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1-\lambda & 3\\4 & 2-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \qquad \Leftrightarrow \qquad (A - \lambda I)X = 0$$

onde $A - \lambda I = \begin{bmatrix}1-\lambda & 3\\4 & 2-\lambda\end{bmatrix}$

A equação característica de A é

$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\4 & 2-\lambda\end{vmatrix} = 0$ ou

$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda + 2)(\lambda - 5) = 0$ de modo que

os autovalores de A são $\lambda = -2$ e $\lambda = 5$

Por definição $X = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ é um autovetor de A se, e somente se, X é uma solução não trivial de $(A - \lambda I)X = 0$

$$\lambda = -2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}3 & 3\\4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad X = \begin{bmatrix}t\\-t\end{bmatrix}$$

$$\lambda = 5 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}-4 & 3\\4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad X = \begin{bmatrix}t\\-\frac{4}{3}t\end{bmatrix}$$

Expansão em co-fatores; Regra de Cramer

Se A é uma matriz quadrada, então o determinante menor do elemento a_{ij}, denotado por M_{ij}, é definido pela pelo determinante da submatriz que sobra quando a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A.

O número $(-1)^{i+j} M_{ij}$, denotado por C_{ij}, é chamado de co-fator de a_{ij}.

Ex.: Encontrando determinantes menores e co-fatores

Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

Então, $M_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = 40 - 24 = 16$, $C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = (-1)^2 16 = 16$

$M_{32} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = 18 + 8 = 26$,

$C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = (-1)^5 26 = -26$

Calculando um determinante segundo os seus co-fatores:

Seja A = (a_{ij}) uma matriz n x n. Então

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \ldots + a_{1n}C_{1n}$$ ou

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + \ldots + a_{n1}C_{n1}$$

Ex.: Seja A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$. Então $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} =$

$$= 3\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 3(-4) - 1(-11) + 0(12) = -12 + 11 = -1$$

Ex.: Calcule det(A) onde A = $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

Operando com linhas e expandindo em co-fatores, nós obtemos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -18$$

Matriz adjunta

Se A é uma matriz n x n então a matriz adj(A) = $(C_{ij})^T$ é chamada de matriz adjunta de A.

Ex.: Seja A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Então $C_{11} = 3, \quad C_{12} = -1, \quad C_{21} = -2, \quad C_{22} = 1$,

logo adj(A) =transposta($\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$)= $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Ex.: Seja A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$. Então

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 12 \qquad C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -16 \qquad C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \qquad C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 16$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 12 \qquad C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 16$$

$$\begin{array}{lll} C_{11} = 12, & C_{12} = 6, & C_{13} = -16, \\ C_{21} = 4, & C_{22} = 2, & C_{23} = 16, \\ C_{31} = 12, & C_{32} = -10, & C_{33} = 16 \end{array} ,$$

logo adj(A) =transposta($\begin{bmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{bmatrix}$)= $\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$

Inversa de uma matriz usando a adjunta

Se A é uma matriz invertível, então $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} adj(A)$

Ex.: Seja A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, Então adj(A) = $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, logo

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ex.: Seja A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, Então

$$\begin{array}{lll} C_{11} = 12, & C_{12} = 6, & C_{13} = -16, \\ C_{21} = 4, & C_{22} = 2, & C_{23} = 16, \\ C_{31} = 12, & C_{32} = -10, & C_{33} = 16 \end{array}$$

logo adj(A) = $\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \times 12 - 2 \times (-6) + (-1) \times (-16) = 36 + 12 + 16 = 64$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A) = \frac{1}{64}\begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Regra de Cramer

Ex.: Considere o sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ A_1 = $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ A_2 = $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-6}{-2} = 3 \qquad y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Ex.: Considere o sistema $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + y - z = 1 \\ x - y + z = 5 \end{cases}$

A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ A_1 = $\begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ A_2 = $\begin{bmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ A_3 = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \qquad y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \qquad z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$