

Determinante de uma matriz

Seja A uma matriz quadrada de ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \quad \text{Definimos } \det(A) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Ex.: Seja A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{Então, } \det(A) = 1 \times 3 - 1 \times 2 = 3 - 2 = 1$$

Determinante de uma matriz 3 x 3 – Regra de Sarrus (Pierre Frédéric Sarrus)

Seja A uma matriz quadrada de ordem 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad \text{Definimos } \det(A) =$$

$$a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} -$$

$$a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

Regra de Sarrus

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

Ex.: Seja A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Então, } \det(A) = 1 \times 5 \times 9 + 2 \times 6 \times 7 + 3 \times 4 \times 8 - 3 \times 5 \times 7 - 1 \times 6 \times 8 - 2 \times 4 \times 9 =$$

$$= 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0$$

Permutações de dois inteiros

Existem $2 = 2!$ permutações distintas do conjunto $\{1, 2\}$

$\{1, 2\}$ $\{2, 1\}$

O número de inversões na permutação $\{1, 2\}$ é igual a 0

O número de inversões na permutação $\{2, 1\}$ é igual a 1

Uma permutação é chamada par se o número total de inversões é um inteiro par.

Uma permutação é chamada ímpar se o número total de inversões é um inteiro ímpar.

$\{1, 2\}$ é uma permutação par

$\{2, 1\}$ é uma permutação ímpar

Permutações de três inteiros

Existem $6 = 3!$ permutações distintas do conjunto $\{1, 2, 3\}$

$\{1, 2, 3\}$ $\{1, 3, 2\}$ $\{2, 1, 3\}$ $\{2, 3, 1\}$ $\{3, 1, 2\}$ $\{3, 2, 1\}$

O número de inversões na permutação $\{1, 2, 3\}$ é igual a 0

O número de inversões na permutação $\{1, 3, 2\}$ é igual a 1

O número de inversões na permutação $\{2, 1, 3\}$ é igual a $1 + 0 = 1$

O número de inversões na permutação $\{2, 3, 1\}$ é igual a $1 + 1 = 2$

O número de inversões na permutação $\{3, 1, 2\}$ é igual a $2 + 0 = 2$

O número de inversões na permutação $\{3, 2, 1\}$ é igual a $2 + 1 = 3$

$\{1, 2, 3\}$ é uma permutação par

$\{1, 3, 2\}$ é uma permutação ímpar

$\{2, 1, 3\}$ é uma permutação ímpar

$\{2, 3, 1\}$ é uma permutação par

$\{3, 1, 2\}$ é uma permutação par

$\{3, 2, 1\}$ é uma permutação ímpar

Seja A uma matriz quadrada de ordem 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \quad \text{Definimos } \det(A) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

Observe que as ordens das linhas nos elementos da definição de $\det(A)$ permanecem fixas e igual a $\{1, 2\}$, enquanto que as ordens das colunas variam em cada parcela, correspondendo a uma permutação de $\{1, 2\}$. O sinal de cada parcela é dado pela classificação da permutação corresponde (par ou ímpar).

Seja A uma matriz quadrada de ordem 3

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}. \quad \text{Definimos } \det(A) =$$

$$a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} -$$

$$a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

O mesmo acontece com $\det(A)$, as ordens das linhas nos elementos da definição de $\det(A)$ permanecem fixas e igual a $\{1, 2, 3\}$, enquanto que as ordens das colunas variam em cada parcela, correspondendo a uma permutação de $\{1, 2, 3\}$.

O sinal de cada parcela é dado pela classificação da permutação corresponde (par ou ímpar).

Estas definições podem ser aplicadas para matrizes de ordem $n \times n$, onde n é um inteiro maior ou igual a 2.

Calculando determinante através de redução por linhas

Teorema: Seja A uma matriz quadrada.

- (a) Se A tem uma linha ou uma coluna de zeros, então $\det(A) = 0$
- (b) $\det(A) = \det(A^T)$

Teorema: Se A é uma matriz quadrada triangular $n \times n$, então

$$\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$$

Teorema: Seja A uma matriz $n \times n$.

- (a) Se B é a matriz que resulta quando uma única linha ou uma única coluna de A é multiplicada por um escalar k , então $\det(B) = k \det(A)$
- (b) Se B é a matriz que resulta quando duas linhas ou duas colunas de A são permutadas, então $\det(B) = -\det(A)$
- (c) Se B é a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha de A é somado a outra linha, então $\det(B) = \det(A)$

- (d) Se B é a matriz que resulta quando um múltiplo de uma coluna de A é somado a outra coluna, então $\det(B) = \det(A)$

Teorema: Se A é uma matriz quadrada n x n com duas linhas ou duas colunas proporcionais, então $\det(A) = 0$.

Notação: Seja A a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{então} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{Ex.:} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad \text{as colunas 1 e 3 foram permutadas;}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad 7 \text{ vezes a última linha foi somada a primeira}$$

$$\text{Ex.:} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Calculando determinante através de redução por linhas

$$\text{Ex.: Calcule } \det(A), \text{ onde } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$-3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} = -3 \times 1 \times 1 \times (-55) = 165$$

Propriedades básicas dos determinantes:

- (a) Se A é uma matriz $n \times n$ e k um escalar, então $\det(kA) = k^n \det(A)$
- (b) Se A e B são matrizes quadradas $n \times n$, então $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- (c) Uma matriz quadrada A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$
- (d) Se A é invertível, então $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Sistemas lineares da forma $AX = \lambda X$

$$AX = \lambda X \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I)X = 0$$

Os valores de λ para os quais o sistema tem uma solução não trivial ($X \neq 0$) são chamados de autovalores.

Se λ é um autovalor de A , então cada solução não trivial de $(A - \lambda I)X = 0$ é chamada um autovetor de A associado ao autovalor λ .

Ex.: Considere o sistema

$$\begin{cases} x + 3y = \lambda x \\ 4x + 2y = \lambda y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad (A - \lambda I)X = 0$$

$$\text{onde } A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

A equação característica de A é

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ou}$$

$$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda + 2)(\lambda - 5) = 0 \quad \text{de modo que}$$

os autovalores de A são $\lambda = -2$ e $\lambda = 5$

Por definição $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é um autovetor de A se, e somente se, X é uma solução não trivial de $(A - \lambda I)X = 0$

$$\lambda = -2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad X = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 5 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad X = \begin{bmatrix} t \\ -\frac{4}{3}t \end{bmatrix}$$

Expansão em co-fatores; Regra de Cramer

Se A é uma matriz quadrada, então o determinante menor do elemento a_{ij} , denotado por M_{ij} , é definido pela pelo determinante da submatriz que sobra quando a i-ésima linha e a j-ésima coluna de A.

O número $(-1)^{i+j} M_{ij}$, denotado por C_{ij} , é chamado de co-fator de a_{ij} .

Ex.: Encontrando determinantes menores e co-fatores

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{Então, } M_{11} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = 40 - 24 = 16, \quad C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = (-1)^2 16 = 16$$

$$M_{32} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = 18 + 8 = 26,$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = (-1)^5 26 = -26$$

Calculando um determinante segundo os seus co-fatores:

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $n \times n$. Então

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \dots + a_{1n}C_{1n} \text{ ou}$$

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + \dots + a_{n1}C_{n1}$$

$$\text{Ex.: Seja } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}. \text{ Então } \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4) - 1(-11) + 0(12) = -12 + 11 = -1$$

$$\text{Ex.: Calcule } \det(A) \text{ onde } A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Operando com linhas e expandindo em co-fatores, nós obtemos:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = -18$$

Matriz adjunta

Se A é uma matriz $n \times n$ então a matriz $\text{adj}(A) = (C_{ij})^T$ é chamada de matriz adjunta de A .

Ex.: Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Então $C_{11} = 3$, $C_{12} = -1$, $C_{21} = -2$, $C_{22} = 1$,

logo $\text{adj}(A) = \text{transposta} \left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Ex.: Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$. Então

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 12 \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 6$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -16 \quad C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \quad C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 16$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 12 \quad C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -10$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 16$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= 12, & C_{12} &= 6, & C_{13} &= -16, \\ C_{21} &= 4, & C_{22} &= 2, & C_{23} &= 16, \\ C_{31} &= 12, & C_{32} &= -10, & C_{33} &= 16 \end{aligned}$$

$$\text{logo } \text{adj}(A) = \text{transposta} \begin{pmatrix} 12 & 6 & -16 \\ 4 & 2 & 16 \\ 12 & -10 & 16 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Inversa de uma matriz usando a adjunta

Se A é uma matriz invertível, então $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$

$$\text{Ex.: Seja } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \text{ Então } \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ logo}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ex.: Seja } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \text{ Então}$$

$$\begin{aligned} C_{11} &= 12, & C_{12} &= 6, & C_{13} &= -16, \\ C_{21} &= 4, & C_{22} &= 2, & C_{23} &= 16, \\ C_{31} &= 12, & C_{32} &= -10, & C_{33} &= 16 \end{aligned}$$

$$\text{logo } \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 3 \\ 2 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \times 12 - 2 \times (-6) + (-1) \times (-16) = 36 + 12 + 16 = 64$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 12 \\ 6 & 2 & -10 \\ -16 & 16 & 16 \end{bmatrix}$$

Regra de Cramer

Ex.: Considere o sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-6}{-2} = 3 \quad y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Ex.: Considere o sistema $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x + y - z = 1 \\ x - y + z = 5 \end{cases}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} \quad y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} \quad z = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$