Potência de uma matriz

Se A é uma matriz quadrada, definimos as potências inteiras não negativas de A por

$A^0 = 1$; $A^2 = A\,A$; ... $A^n = A\,A \ldots A$

$A^{-n} = (A^{-1})^n = A^{-1}\,A^{-1} \ldots A^{-1}$

Ex.: Sejam A e A^{-1} as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Então

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{bmatrix} \qquad \text{e}$$

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix}$$

Expressão polinomial envolvendo matriz

Se A é uma matriz e se $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ é um polinômio qualquer, então nós definimos

$$p(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_nA^n$$

Ex.: Se $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$ e $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ então

$$P(A) = 2A^2 - 3A + 4I =$$

$$= 2\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Matrizes elementares

Uma matriz que pode ser obtida da matriz identidade I executando uma única operação elementar sobre linhas é chamada uma matriz elementar.

Ex.: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ (multiplicando a segunda linha de I_{2x2} por -3)

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (permutando a segunda linha de I_{4x4} com a quarta)

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (somando a 3 vezes a terceira linha de I_{3x3} com a primeira)

Propriedades: (1) Qualquer matriz elementar é invertível e a inversa é. Também, uma matriz elementar.

(2) Se A é uma matriz n x n então as seguintes afirmações são equivalentes.

(a) A é invertível.
(b) Ax = 0 tem somente a solução trivial.
(c) A forma escalonada reduzida por linhas de A é I.
(d) A pode ser expressa como um produto de matrizes elementares.

Ex.: Usando operações sobre linhas para encontrar A^{-1}

Encontre a inversa de A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Queremos reduzir a matriz A à matriz identidade I por operações sobre linhas e simultaneamente aplicar estas operações a I para produzir A^{-1}.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Passos: 1) Somamos -2 vezes a primeira linha a segunda;

$$\left[\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 8 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right]$$

2) Somamos -1 vezes a primeira linha a terceira;

$$\left[\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{matrix}\right]$$

3) Somamos 2 vezes a segunda linha a terceira;

$$\left[\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{matrix}\right]$$

4) Multiplicamos a terceira linha por -1;

$$\left[\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 \end{matrix}\right]$$

5) Somamos 3 vezes a terceira linha a segunda;

$$\left[\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{matrix}\right]$$

6) Somamos -3 vezes a terceira linha a primeira;

$$\left[\begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} -14 & 6 & 3 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{matrix}\right]$$

7) Somamos -2 vezes a segunda linha a primeira.

$$\left[\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right]\left[\begin{matrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{matrix}\right]$$

Assim, $A^{-1} = \left[\begin{matrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{matrix}\right]$

Ex.: Usando operações sobre linhas para mostrar que A não é invertível.
Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad => \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad =>$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad => \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Como obtivemos uma linha de zeros no lado esquerdo, A não é invertível.

Ex.: Resolver o sistema AX = 0 onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Como A é invertível e $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, temos

$A^{-1}AX = A^{-1}0 \quad => \quad IX = A^{-1}0 \quad => \quad X = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ex.: Solução de um sistema linear usando A^{-1}

Resolver o sistema AX = B onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$

$AX = B \quad => \quad A^{-1}AX = A^{-1}B \quad =>$

$IX = A^{-1}B \quad => \quad X = A^{-1}B \quad =>$

$$X = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ex.: Solução de um sistema linear usando operações sobre linhas

Resolver o sistema AX = B onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 8 & 17 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & 5 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ex.: Solução de dois ou mais sistemas lineares usando operações sobre linhas

Resolver os sistemas AX = B, AX = C e AX = D onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$

Reduzindo a forma escalonada com o uso de operações sobre linhas obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 8 & 17 & 9 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Matrizes diagonais, triangulares e simétricas

Matriz diagonal é uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ onde $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Ex.: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz triangular inferior é uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ onde $a_{ij} = 0$ se $i < j$.

Ex.: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz triangular superior é uma matriz quadrada $A = (a_{ij})$ onde $a_{ij} = 0$ se $i > j$.

Ex.: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz simétrica é uma matriz quadrada A tal que $A = A^T$.

Ex.: $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ex: Encontre todos os valores de a, b e c para os quais A é simétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a - 2b + 2c & 2a + b + c \\ 3 & 1 & a + c \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

Ex: Encontre uma matriz diagonal A tal que $A^{-2} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ex: Encontre uma matriz triangular superior que satisfaz $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 30 \\ 0 & -81 \end{bmatrix}$