Álgebra Linear

Matrizes e vetores
Sistemas lineares
Espaços vetoriais
Base e dimensão
Transformações lineares
Matriz de uma transformação linear

Aplicações da Álgebra Linear:

Redes elétricas – Circuitos que contém resistências e geradores de energia podem ser analisados usando sistemas de equações lineares;

Programação linear geométrica – Um problema usual tratado na área de programação linear é o da determinação de proporções dos ingredientes em uma mistura com o objetivo de minimizar seu custo quando as proporções variam dentro de certos limites;

Problema de alocação de tarefas – deslocamento de pessoal e de recursos de maneira eficiente quanto ao custo nas indústrias;

Interpolação spline cúbica – as fontes tipográficas PostScript™ e TrueType™ usadas em telas de monitores são definidas por curvas polinomiais por partes denominas splines;

Cadeias de Markov – estimativa da probabilidade de acontecimentos futuros com base em dados passados;

Teoria dos Grafos - A Teoria dos Grafos é atualmente uma das áreas mais importantes da matemática discreta. Tendo as suas raízes em jogos e recreações matemáticas, atribui-se a sua criação a Euler, ao resolver o problema das pontes de Königsberg em 1736, mas foram os problemas acerca de fórmulas de estrutura de compostos químicos, que A. Cayley resolveu na segunda metade do século XIX, que a começaram a desenvolver. Hoje, a Teoria dos Grafos tem sido aplicada a muitas áreas (Informática, Investigação Operacional, Economia, Sociologia, Genética, etc.), pois um grafo constitui o modelo matemático ideal para o estudo das relações entre objetos discretos de qualquer tipo;

Jogos de estratégia – os métodos matriciais podem ser usados para desenvolver estratégias otmizadas para os jogadores;

Modelos econômicos de Leontief – Tais modelos são baseados nas idéias do economista russo Wassily Leontief, prêmio Nobel de Economia de 1973. Usando teoria de matrizes é possível calcular certos parâmetros adicionais, tais como os preços e níveis de produção, para satisfazer um objetivo econômico desejado;

Computação Gráfica – Uma das aplicações mais úteis da Computação Gráfica é a do simulador de vôo;

Tomografia computadorizada – Os métodos da Álgebra Linear podem ser usados para reconstruir imagens a partir do escaneamento por raios X da tomografia computadorizada;

Criptografia, Genética e outras aplicações.

1 – Matrizes e vetores

Introdução aos Sistemas de equações lineares

Equação linear — Matriz aumentada

ax + by = c — [a b c]

Ex.:

2x + 3y = 5 — [2 3 5]

Sistemas de equações lineares — Matriz aumentada

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}w = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}w = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}w = b_3 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \end{bmatrix}$$

Ex.:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z - 5w = 10 \\ 3x - 5y + 8z - w = 15 \\ -4x + 6y - z + 3w = 27 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & -5 & 10 \\ 3 & -5 & 8 & -1 & 15 \\ -4 & 6 & -1 & 3 & 27 \end{bmatrix}$$

Definição: Uma matriz é um agrupamento retangular de números.

Exs.:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}$$

Tamanho de uma matriz:

Dim (A) = 3 x 2 Dim (B) = 1 x 4 Dim (C) = 3 x 3 Dim (A) = 1 x 1

Simbologia: A = (a_{ij}) onde Dim(A) = m x n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriz quadrada de ordem n é uma matriz onde o número de linhas m é igual ao número de colunas n.

Ex.: $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ Ordem (C) = 3

Operações sobre matrizes

Definição: Duas matrizes são definidas como sendo iguais se têm o mesmo tamanho e seus elementos correspondentes são iguais, i.é, $a_{ij} = b_{ij}$.

Ex.: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ se, e somente se, x = 5

Adição e subtração de matrizes

Sejam A = (a_{ij}), B = (b_{ij}). Então

A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = ($a_{ij} + b_{ij}$)

A – B = (a_{ij}) – (b_{ij}) = ($a_{ij} - b_{ij}$)

Ex.: Dados $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

encontre A + B e A – B.

Multiplicação por um escalar

Se A é uma matriz e k é um escalar, então o produto cA é a matriz obtida pela multiplicação de cada elemento da matriz A por k.

Ex.: $2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 6 & 0 & -10 \\ -2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

$-1 A = ?$

Se A, B são matrizes do mesmo tamanho e a, b são escalares, então uma expressão da forma aA + bB é chamada de combinação linear A e B.

Ex.: Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ então

encontre 2A + 3B, 2A – 3B, –2A – 3B

Multiplicação de matrizes

Dim (A) = m x k, Dim (B) = k x n

Dim (AB) = m x n

Ex.: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 12 & 28 & 21 & 32 \\ 11 & 14 & 07 & 21 \end{bmatrix}$

12 = 1 x 3 + 2 x 2 + 5 x 1 28 = 1 x 2 + 2 x 3 + 5 x 4

11 = 3 x 3 + 0 x 2 + 2 x 1 14 = 3 x 2 + 0 x 3 + 2 x 4

Colunas do produto AB como combinações lineares

$\begin{bmatrix} 12 \\ 11 \end{bmatrix} = 3 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \times \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 28 \\ 14 \end{bmatrix} = 2 \times \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \times \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

Forma matricial de um sistema linear

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots. \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots. \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots. \\ b_m \end{bmatrix}$$

Ax = B

Transposta de uma matriz: A^T

Definição: Se A é uma matriz m x n qualquer, então a transposta de A, denotada por A^T, é a matriz onde a primeira linha de A^T é a primeira coluna de A, a segunda linha de A^T é a segunda coluna de A, a terceira linha de A^T é a terceira coluna de A, e assim por diante.

Ex.: Se A = $\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$ então $A^T = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$

Se A = $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ então $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$

Se A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ então $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

Propriedades da transposta

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(3) $(A - B)^T = A^T - B^T$

(4) $(kA)^T = kA^T$

(5) $(AB)^T = B^T A^T$

Traço de uma matriz

Se A é uma matriz quadrada, então o traço de A, denotado por tr(A), é definido pela soma dos elementos da diagonal principal.

$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + ... a_{nn}$

Ex.: Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

Então tr(A) = 1 + 0 + 2 = 3; tr(A) = 3 + 3 + 2 = 8

Propriedades das matrizes

1) A + B = B + A (Comutatividade para a adição)
2) A + (B + C) = (A + B) + C (Associatividade para a adição)
3) A (B C) = (A B) C (Associatividade para a multiplicação)
4) A (B + C) = A B + A C (Distributividade à esquerda)
5) (A + B) C = A C + B C (Distributividade à direita)
6) a (B + C) = a B + a C
7) (a + b) C = a C + b C
8) a (b C) = (a b) C
9) a (B C) = (a B) C = B (a C)

Ex.: Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. Multiplicando AB e BA obtemos

$AB = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$, o que mostra que AB ≠ BA

Matrizes Zero

Uma matriz com todos os seus elementos nulos.

$\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Propriedades:

(1) A + 0 = 0 + A = A
(2) A – A = 0
(3) 0 – A = – A

(4) A 0 = 0 A = 0

Matrizes Identidade

Uma matriz quadrada com todos os seus elementos nulos para i ≠ j e iguais a 1 quando i = j.

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

(1) A I = I A = A

Matriz inversa

Dada uma matriz quadrada A, se pudermos encontrar uma matriz quadrada B de mesmo tamanho tal que AB = BA = I, então diremos que A é invertível e que B é uma inversa de A.

Ex.: B = $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é uma inversa de A = $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ pois

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \text{e}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Ex.: A = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz sem inversa pois

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim, BA ≠ I = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Propriedades:

(1) Se B e C são inversas da matriz A, então B = C

(2) A matriz A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é invertível se ad – bc ≠ 0. Neste caso,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

(3) Se A e B são matrizes invertíveis de mesmo tamanho, então AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(4) Se A é uma matriz invertível, então A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$

(5) Se A é uma matriz invertível, então kA é invertível e $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

Ex.: Calcule as inversas das seguintes matrizes

1) A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2) B = $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 3) C = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

Ex.: Seja a matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determine se A é invertível e, se for, encontre sua inversa.