Álgebra Linear

Curso de
Engenharia
Civil

Período 2015.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Álgebra Linear

Módulo V – Transformações e operadores lineares.

Dados dois conjuntos V e W, não vazios, uma aplicação T de V em W é uma regra que a cada elemento de V associa um único elemento de W.

$$\begin{aligned} T : V &\rightarrow W \\ v &\rightarrow T(v) \end{aligned}$$

V – domínio de T

W – contra-domínio de T

$\text{Imagem}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$

Exemplo: $T : R^2 \rightarrow R^3$ definida por $T(x, y) = (x + y, xy, x^2 - y^2)$

$T(1, 2) = (3, 2, -3)$

$T(2, 1) = (3, 2, 3)$

Álgebra Linear

Módulo V – Transformações e operadores lineares.

Uma aplicação T de V em W é chamada uma transformação linear de V em W se,

1) $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2) $T(kv) = k\,T(v)$

para quaisquer vetores u, v em V e qualquer escalar k.

Exemplo: $T : R^2 \to R^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, x - y)$

Álgebra Linear

Módulo V – Transformações e operadores lineares.

Suponha $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$. Então

1) $u + v = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$

$T(u + v) = T(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) =$

$(x_1 + x_2 + y_1 + y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2) =$

$(x_1 + y_1,\ x_1 - y_1) + (x_2 + y_2,\ x_2 - y_2) =$

$T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = T(u) + T(v)$

2) $kv = k(x, y) = (kx, ky)$

$T(kv) = T(kx, ky) = (kx + ky, kx - ky) =$

$k(x + y, x - y) = kT(x, y) = kT(v)$

Álgebra Linear

Módulo V – Transformações e operadores lineares.

A transformação linear $T(x, y) = (x + y, x - y)$ pode também ser expressa pelas equações

$$v = x + y \quad e \quad w = x - y$$

ou pelo sistema matricial

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

de modo que a matriz canônica de T é $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Módulo V – Transformações e operadores lineares.

Exemplo: $T : R^2 \rightarrow R^3$ definida por $T(x, y) = (x + y, x - y, y - x)$
ou definida pelas equações

$$v = x + y \quad , \quad w = x - y \quad e \quad z = y - x$$

ou de modo matricial

$$\begin{bmatrix} v \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo V – Transformações e operadores lineares.

Se W = V, então a transformação linear é chamada de operador linear de V.

Exemplo: Reflexão em torno do eixo y

$$T(x, y) = (-x, y)$$

$$\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo: Reflexão em torno do eixo x

$$T(x, y) = (x, -y)$$

$$\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Álgebra Linear

Módulo V – Transformações e operadores lineares.

Exemplo: Reflexão em torno da reta $y = x$

$$T(x, y) = (y, x)$$

$$\begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Exemplo: Sejam V e W dois espaços vetoriais quaisquer. A aplicação $T : V \rightarrow W$ definida por $T(v) = 0$ para todo v em V é chamada de Transformação linear nula.

$$T(u + v) = 0 = 0 + 0 = T(u) + T(v)$$

$$T(kv) = 0 = k \,.\, 0 = k \,.\, T(v)$$

Módulo V – Transformações e operadores lineares.

Exemplo: Se V é um espaço vetorial e $T : V \to V$ é definido por $T(v) = v$, então T é um operador linear, chamado de operador Identidade.

Da mesma forma, $T : V \to V$ definido por $T(v) = kv$ é chamdo de

Operador dilatação	se	$k > 1$
Operador contração	se	$0 < k < 1$

Módulo V – Transformações e operadores lineares.

Exemplo: Construa uma base ortonormal do R^3.

Sejam $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$.
Como

$$< v_1 , v_2 > = < v_1 , v_3 > = < v_2 , v_3 > = 0 \quad \text{e}$$

$$\| v_1 \| = \| v_2 \| = \| v_3 \| = 1 \qquad \text{temos que}$$

$v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$ formam uma base ortonormal do R^3.

Módulo V – Transformações e operadores lineares.

Projeção ortogonal de V sobre W

Suponha que V e W sejam espaços de dimensão finita. Seja $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ uma base ortonormal de W. A projeção ortogonal de V sobre W é a transformação definida por

$$T(v) = \text{proj}_W v = \langle v, w_1 \rangle w_1 + \langle v, w_2 \rangle w_2 + \ldots + \langle v, w_n \rangle w_n$$

Módulo V – Transformações e operadores lineares.

Exemplo: Projeção ortogonal do R^3 sobre o plano xy

$w_1 = (1, 0, 0)$ e $w_2 = (0, 1, 0)$ formam uma base ortonormal do plano xy. Portanto,

$$T(v) = T(x, y, z) = \langle (x, y, z), (1, 0, 0) \rangle (1, 0, 0) + \langle (x, y, z), (0, 1, 0) \rangle (0, 1, 0) = x\,(1, 0, 0) + y\,(0, 1, 0) = (x, y, 0)$$

Álgebra Linear

Módulo V – Transformações e operadores lineares.

Exemplo: Seja $T : P_n \to P_{n+1}$ definida por $T(p(x)) = xp(x)$. Então T é uma transformação linear.

Exemplo: Seja $T : V \to R$ definida por $T(v) = < v, v_0 >$. Então T é uma transformação linear.

Exemplo: Seja $T : D(x) \to C(x)$ definida por $T(f(x)) = f'(x)$. Então T é uma transformação linear.

Álgebra Linear

A matemática da vida

Quando somos estudantes, nem sempre conseguimos atinar com o objetivo de estudar determinadas matérias. É comum se ouvir de garotos e garotas comentários a respeito desta ou daquela matéria, da qual não conseguem vislumbrar necessidade para suas vidas.

Contudo, todo aprendizado pode ser aplicável em nossas vidas. Vejamos, por exemplo, a matemática. Além de nos fornecer facilidade no trato com os cálculos, sem os quais ficaria comprometido o nosso conforto, pois não se poderia construir as maravilhas da engenharia moderna, nem estabelecer relações comerciais com os indivíduos e as nações, verificamos que ela se encontra presente em nossa intimidade.

Álgebra Linear

É graças à matemática que podemos contar as batidas da bomba cardíaca e os movimentos respiratórios para avaliação do estado de saúde ou enfermidade dos indivíduos.

E, na nossa vida moral, podemos utilizar muito das operações aritméticas mais simples.

Assim, podemos subtrair um pouco do conforto de algumas horas e aplicá-las em benefício do próximo. Agindo assim, somamos méritos para nós mesmos.

Se subtraímos o orgulho do nosso coração, somaremos humildade à nossa personalidade e a soma final será grandiosa.

Subtraindo erros das nossas vidas, somaremos mais anos de paz à nossa existência.

Álgebra Linear

Subtraindo a maldade da nossa mente, somaremos amor e bondade à nossa fé, conquistando maior saldo de alegrias.

Quanto mais lutas redentoras, menos dores nos alcançarão na vida.

Quanto mais disposição para a renovação, menos inquietudes em nossas noites.

Quanto mais esforço pessoal, menos desespero em nosso trabalho diário.

Quanto mais amor em nossos dias, menos tortura a nos afligir os corações.

Autor:

Redação do Momento Espírita, baseado no livro Ementário Espírita, de Divaldo Pereira Franco, cap. Na subtração e na soma.