Álgebra Linear

Curso de
Engenharia
Civil

Período 2015.1

Prof. da Disciplina
Luiz Gonzaga Damasceno, M. Sc

Álgebra Linear

Módulo IV – Espaços Vetoriais. Subespaços Vetoriais.

Espaços vetoriais

Definição: Seja V um conjunto não vazio de elementos no qual estão definidas duas operações: adição e multiplicação por escalares. Dizemos que V é um espaço vetorial se para todo u, v, w em V e quaisquer escalares k, l as seguintes propriedades são satisfeitas:

(1) u + v é um elemento de V;

(2) u + v = v + u;

(3) u + (v + w) = (u + v) + w;

(4) existe um elemento 0 em V tal que 0 + u = u + 0 = u;

(5) existe – u em V tal que u + (– u) = (– u) + u = 0;

Módulo IV – Espaços Vetoriais. Subespaços Vetoriais.

(6) ku é um elemento de V;

(7) $k(u + v) = ku + kv$;

(8) $(k+l)\,u = ku + ku$;

(9) $k(lu) = (kl)u$;

(10) existe um escalar 1 tal que $1 \,.\, u = u \,.\, 1 = u$

Exemplo 1: V = R (conjunto dos números reais) é um espaço vetorial.

Exemplo 2: $V = R^2$ (conjunto dos vetores do plano) é um espaço vetorial.

Exemplo 3: V = {X|X é uma matriz 2x2} (conjunto das matrizes 2x2) é um espaço vetorial.

Álgebra Linear

Módulo IV – Espaços Vetoriais. Subespaços Vetoriais.

Subespaços vetoriais

W subconjunto de V é um subespaço vetorial de V se, e somente se, valem as seguintes condições:

(1) Se u, v são vetores de W, então u + v é um vetor de W;

(2) Se k é um escalar qualquer e v um vetor de W, então kv é um vetor de W.

Exemplo. 4: Seja V = R^2 e W = {(x,y) | y = 3x}. Então W é um subespaço de V.

Módulo IV – Espaços Vetoriais. Subespaços Vetoriais.

(1) Sejam (x_1, y_1), (x_2, y_2) elementos de W. Então

$y_1 = 3x_1$, $y_2 = 3x_2$, logo

$y_1 + y_2 = 3x_1 + 3x_2 = 3(x_1 + x_2)$. Portanto,

$(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ é um vetor de W;

(2) Sejam k um escalar e (x, y) um elemento de W. Então

$y = 3x$, logo

$ky = 3kx$, portanto,

$k(x, y) = (kx, ky)$ é um vetor de W.

Módulo IV – Espaços Vetoriais. Subespaços Vetoriais.

Exemplo. 5: Seja V = R^2 e W = $\{(x, y) \in V \mid 3x + 2y = 0\}$.
Então W é um subespaço de V.

(1) Sejam (x_1, y_1), (x_2, y_2) elementos de W. Então

$3x_1 + 2y_1 = 0$, $3x_2 + 2y_2 = 0$, logo

$3x_1 + 2y_1 + 3x_2 + 2y_2 = 0$. Portanto,

$3(x_1 + x_2) + 2(y_1 + y_2) = 0$,

de onde concluímos que (x_1+x_2, y_1+y_2) é um vetor de W;

(2) Sejam k um escalar e (x, y) um elemento de W. Então

$3x + 2y = 0$, logo

$3kx + 2ky = 0$, portanto,

$k(x, y) = (kx, ky)$ é um vetor de W.

Álgebra Linear

Módulo IV – Espaços Vetoriais. Subespaços Vetoriais.

Exemplo. 6: Seja $V = R^2$ e $W = \{(x,y) \in V \mid x + y = 3\}$. Então W não é um subespaço de V.

O vetor (0, 0) não é um elemento de W. Portanto, W não é um subespaço de V.

Exemplo. 7: Seja $V = R^2$ e $W = \{(x,y) \in V \mid y = 3x - 5\}$. Então W não é um subespaço de V.

O vetor (0, -5) é um elemento de W, mas 2(0, -5) = (0, -10) não é um elemento de W. Portanto, W não é um subespaço de V.

Módulo IV – Espaços Vetoriais. Subespaços Vetoriais.

Combinação linear

Dizemos que um vetor w é uma combinação linear dos vetores $v_1, v_2, \dots, v_n$ se existem escalares $k_1, k_2, \dots, k_n$ tais que

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_n v_n$$

Exemplo. 8 : Os vetores em R^2 são combinações lineares de I=(1, 0) e J=(0, 1)

(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = xI + yJ

Álgebra Linear

Módulo IV – Espaços Vetoriais. Subespaços Vetoriais.

Ex. 9: Os vetores em R^3 são combinações lineares de

$I=(1, 0, 0)$, $J=(0, 1, 0)$ e $K = (0, 0, 1)$

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)\\ &= x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)\\ &= xI + yJ + zK\end{aligned}$$

Ex.10: Mostre que $(9, 2, 7)$ é uma combinação linear dos vetores $(1, 2, -1)$ e $(6, 4, 2)$

$$(9, 2, 7) = x(1, 2, -1) + y(6, 4, 2) \qquad \Rightarrow$$

Álgebra Linear

Módulo IV – Espaços Vetoriais. Subespaços Vetoriais.

$$\begin{cases} x + 6y = 9 \\ 2x + 4y = 2 \\ -x + 2y = 7 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} x = 2y - 7 \\ x + 6y = 9 \end{cases} \quad =>$$

$$\begin{cases} 2y - 7 + 6y = 9 \\ 8y = 16 \\ y = 2 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} x = 2y - 7 \\ x = 4 - 7 \\ x = -3 \end{cases} \quad =>$$

(9, 2, 7) = -3(1, 2, -1) + 2(6, 4, 2)

Álgebra Linear

Módulo IV – Espaços Vetoriais. Subespaços Vetoriais.

Se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são vetores em um espaço vetorial V, então:

(1) O conjunto W de todas as combinações lineares de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ é um subespaço de V;

(2) W é o menor subespaço de V que contém $v_1, v_2, \ldots, v_n$

Neste caso, W é chamado de espaço gerado por $v_1, v_2, \ldots, v_n$

W = ger{ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ }

Álgebra Linear

Módulo IV – Espaços Vetoriais. Subespaços Vetoriais.

Ex. 11: $R^2 = \text{ger}\{(1, 0), (0, 1)\}$

$$(0, 0) = 0(1, 0) + 0(0, 1)$$

$$(2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1)$$

$$(-1, 5) = -1(1, 0) + 5(0, 1)$$

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$$

Ex. 12: Seja $P = \{P(x) \mid P(x) \text{ é um polinômio de grau} \leq 3\}$.

Então,

$$P = \text{ger}\{\ 1, x, x^2, x^3\ \}$$

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 16$$

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Módulo IV – Espaços Vetoriais. Subespaços Vetoriais.

Ex. 13: O conjunto S = {(1, 1, 2), (1, 0, 1), (2, 1, 3)} não gera o R^3

Seja v um vetor do R^3. E suponha que existem escalares x, y, z tais que

V = (v1, v2, v3) = x(1, 1, 2) + y(1, 0, 1) + z(2, 1, 3)

Então

$$\begin{cases} x + y + 2z = v1 \\ x + z = v2 \\ 2x + y + 3z = v3 \end{cases}$$

Para que o sistema tenha uma solução det(A) ≠ 0.

Módulo IV – Espaços Vetoriais. Subespaços Vetoriais.

Mas $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 1 - 3 = 0.$

Logo, o conjunto S = { (1, 1, 2), (1, 0, 1), (2, 1, 3) } não gera o R^3

Álgebra Linear

Módulo IV – Espaços Vetoriais. Subespaços Vetoriais.

Ex. 10: Quais dos seguintes vetores são combinações lineares de

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\ ?$$

(a) $\begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

Álgebra Linear

Independência linear

Seja S = {V1, V2, V3, ... ,Vn) um conjunto de vetores não vazio. Então a equação

$$K1V1 + K2V2 + K3V3 + \dots + KnVn = 0$$

tem pelos menos uma solução, a saber,

$$K1 = 0, K2 = 0, K3 = 0, \dots, Kn = 0$$

Se essa é a única solução, então o conjunto S é chamado linearmente independente.

Se existem outras soluções, então S é chamado linearmente dependente.

Álgebra Linear

Ex. 11:

Mostre que S = {(1, 2, 3), (2, 1, 3), (3, 3, 6)} é LD.

$$x(1, 2, 3) + y(2, 1, 3) + z(3, 3, 6) = (0, 0, 0)$$

$$=> \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 3y + 6z = 0 \end{cases} => \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x \\ 2x + x + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \{3x = -3z \Rightarrow$$

$$\{x = -z \Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

Fazendo z = -1, obtemos x = 1, y = 1 e z = -1, uma solução diferente da solução nula.

Álgebra Linear

Ex. 12:

Mostre que $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é LI.

$x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow$

$(x, y, z) = (0, 0, 0) \Rightarrow$

$x = 0, y = 0, z = 0.$

Álgebra Linear

Ex. 13:

Mostre que $S = \{1, x, x^2, x^3\}$ é LI em P3, conjunto dos polinômios de grau 3.

Basta mostrar que $a + bx + c\,x^2 + dx^3 = 0$ para todo x real implica em

$$a = 0,\ b = 0,\ c = 0 \text{ e } d = 0.$$

Álgebra Linear

$$a + bx + cx^2 + dx^3 = 0$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

$$x = 1 \quad \Rightarrow \quad b + c + d = 0$$

$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad -b + c - d = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

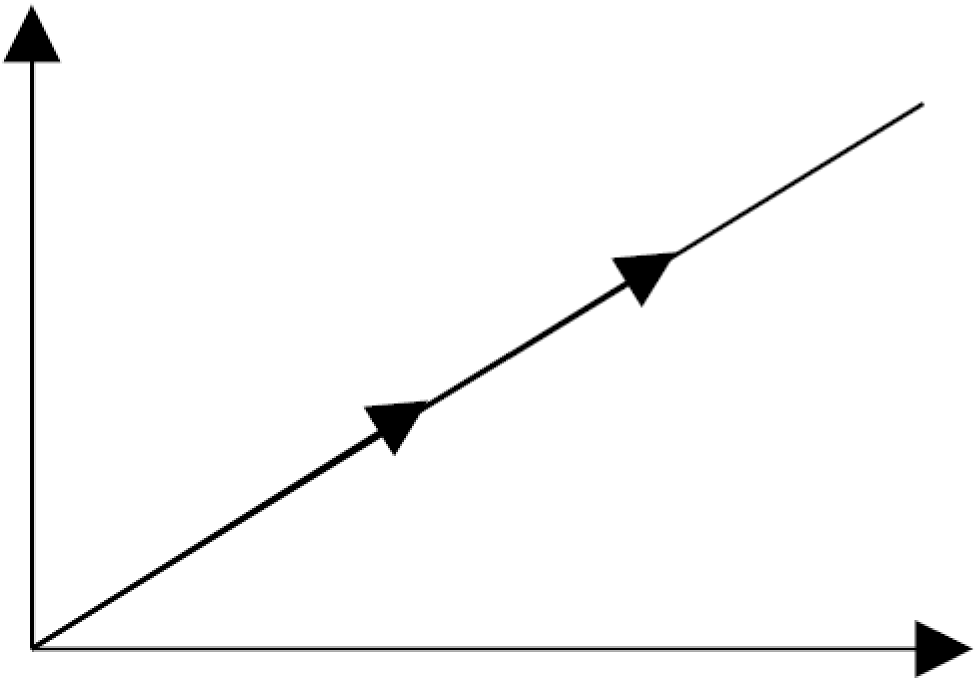
$$x = 2 \quad \Rightarrow \quad 2b + 8d = 0 \quad \Rightarrow \quad b + 4d = 0$$

$$\begin{cases} b + d = 0 \\ b + 4d = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad b = 0,\ d = 0$$

Interpretação Geométrica da Independência Linear

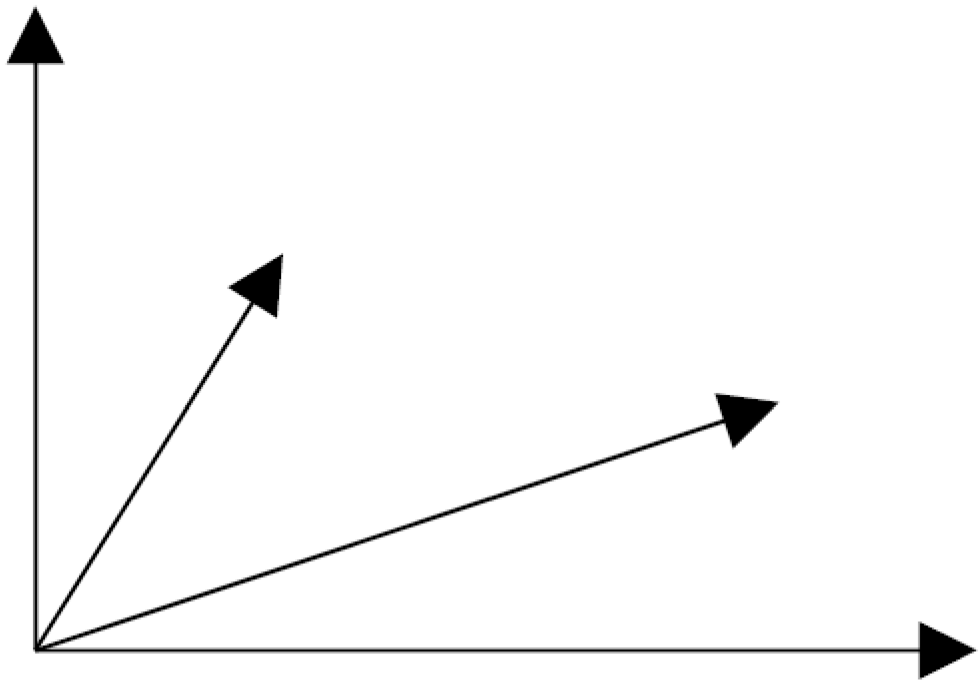
Em R^2 ou R^3 um conjunto de dois vetores é LI se, e somente se, os vetores não estão numa mesma reta quando colocados com seus pontos iniciais na origem.

Álgebra Linear



Linearmente dependentes

Álgebra Linear



Linearmente independentes

Álgebra Linear

Base e dimensão de um espaço vetorial

Seja V um espaço vetorial e $S = \{V1, V2, V3, ..., Vn\}$ um conjunto de vetores de V. Dizemos que S é uma Base de V se:

(1) S é LI

(2) $V = ger(S)$

Se $S = \{V1, V2, V3, ... , Vn\}$ é uma base de V, então dizemos que $dim(V) = n$.

Álgebra Linear

Ex.: S = {(1, 0), (0, 1)} é uma base de R^2, pois

(1) S = {(1, 0), (0, 1)} é um conjunto LI

(2) Dado (x, y) em R^2,

(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1),

o que demonstra que R^2 = ger(S).

Neste caso, dim(R^2) = 2.

Álgebra Linear

Ex.: S = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} é uma base de R^3, pois

(1) S = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)}

é um conjunto LI

(2) Dado (x, y, z) em R^3,

(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1),

o que demonstra que R^3 = ger(S).

Neste caso, dim(R^3) = 3.

Álgebra Linear

Ex.: Mostre que S = {(1, 2, 1), (2, 9, 0), (3, 3, 4)} é uma base de R^3

(1) Vamos mostrar que

S = {(1, 2, 1), (2, 9, 0), (3, 3, 4)} é um conjunto LI. Considere a igualdade:

x(1, 2, 1) + y(2, 9, 0) + z(3, 3, 4) = (0, 0, 0).

Então

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x + 9y + 3z = 0 \\ x + 0y + 4z = 0 \end{cases}$$

Como

Álgebra Linear

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 36 + 18 - 81 - 16 = -43,$$

a igualdade acima possui uma única solução,

a solução trivial x = y = z = 0.

Logo o conjunto S é LI.

Álgebra Linear

(2) Dado (a, b, c) em R^3, considere a igualdade

(a, b, c) = x(1, 2, 1) + y(2, 9, 0) + z(3, 3, 4).

Então

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + 9y + 3z = b \\ x + 0y + 4z = c \end{cases}$$ Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 36 + 18 - 81 - 16 = -43,$$

Álgebra Linear

o sistema possui uma única solução não nula, logo S gera o R^3. Portanto S é uma base de R^3.

S = {(1, 0), (0, 1)} é uma base canônica do R^2

S = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)} é uma base canônica do R^3

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base canônica do espaço das matrizes M(2x2).

Álgebra Linear

Dimensão de alguns espaços vetoriais

Dim(R^2) = 2

Dim(R^3) = 3

Dim(R^n) = n

Dim(P_1) = 2

Dim(P_2) = 3 Dim(M(2x2)) = 2x2 = 4

Dim(P_3) = 4 Dim(M(3x3)) = 3x3 = 9

Dim(P_n) = n + 1 Dim(M(mxn)) = mxn = mn

Álgebra Linear

A matemática da vida

Quando somos estudantes, nem sempre conseguimos atinar com o objetivo de estudar determinadas matérias. É comum se ouvir de garotos e garotas comentários a respeito desta ou daquela matéria, da qual não conseguem vislumbrar necessidade para suas vidas.

Contudo, todo aprendizado pode ser aplicável em nossas vidas. Vejamos, por exemplo, a matemática. Além de nos fornecer facilidade no trato com os cálculos, sem os quais ficaria comprometido o nosso conforto, pois não se poderia construir as maravilhas da engenharia moderna, nem estabelecer relações comerciais com os indivíduos e as nações, verificamos que ela se encontra presente em nossa intimidade.

Álgebra Linear

É graças à matemática que podemos contar as batidas da bomba cardíaca e os movimentos respiratórios para avaliação do estado de saúde ou enfermidade dos indivíduos.

E, na nossa vida moral, podemos utilizar muito das operações aritméticas mais simples.

Assim, podemos subtrair um pouco do conforto de algumas horas e aplicá-las em benefício do próximo. Agindo assim, somamos méritos para nós mesmos.

Se subtraímos o orgulho do nosso coração, somaremos humildade à nossa personalidade e a soma final será grandiosa.

Subtraindo erros das nossas vidas, somaremos mais anos de paz à nossa existência.

Álgebra Linear

Subtraindo a maldade da nossa mente, somaremos amor e bondade à nossa fé, conquistando maior saldo de alegrias.

Quanto mais lutas redentoras, menos dores nos alcançarão na vida.

Quanto mais disposição para a renovação, menos inquietudes em nossas noites.

Quanto mais esforço pessoal, menos desespero em nosso trabalho diário.

Quanto mais amor em nossos dias, menos tortura a nos afligir os corações.

Autor:

Redação do Momento Espírita, baseado no livro Ementário Espírita, de Divaldo Pereira Franco, cap. Na subtração e na soma.